قسم علم الاجتماع السنة الأولى جذع مشترك الاستاذة: عبلاش أسية	المادة: الاحصاء الوصفي الأفواج: 55 - 56

الدرس الرابع عشر:

3- المتغيرات العشوائية:

المتغيرات العشوائية المنفصلة:

المتغير العشوائي: إذا كانت التجربة هي اختيار مجموعة من الطلبة من قسم معين، فيمكن اختيار هؤلاء الطلبة على أساس علاماتهم أو طولهم..... الخ، وعند التعامل مع هذه القيم العددية فمن المفيد تخصيص احتمالات لها، وهذه العلاقة تسمى بالمتغير العشوائي الذي يعرف على أنه مجموعة من القيم العددية لتجربة عشوائية، يكون تحقق هذه القيم مرتبط باحتمالات معينة. وينقسم إلى نوعين: المتغير العشوائي المنفصل والمتغير العشوائي المتصل

أ- **المتغير العشوائي المنفصل:** هو المتغير العشوائي الذي يأخذ عددا من القيم الممكنة في مجال مغلق. فمثلا نقول أن المتغير العشوائي يأخذ 3 قيم ممكنة داخل المجال المغلق [1 ,3] .

مثال:

تتمثل تجربة في رمي 3 قطع نقدية على الأرض. إذا كان X تغير عشوائي يمثل عدد الصور الظاهرة فإنه يأخذ القيم التالية 0, 1, 2, 3 حيث أن كل قيمة ترتبط باحتمال معين. لدينا عدد الحالات الممكنة:

$$\Omega = \{(HHH)(\mathrm{HHT})(\mathrm{HTT})(\mathrm{HTH})(\mathrm{THH})(\mathrm{THT})(\mathrm{TTH})(\mathrm{TTT})\}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}=0)=\mathrm{P}\{\mathrm{TTT}\}=\frac{1}{8}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}=1)=\mathrm{P}\{(\mathrm{HTT})(\mathrm{THT})(\mathrm{TTH})\}=\frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}=2)=\mathrm{P}\{(\mathrm{HHT})(\mathrm{HTH})(\mathrm{THH})\}=\frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}=3)=\mathrm{P}\{\mathrm{HHH}\}=\frac{1}{8}$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الجدول التالي:

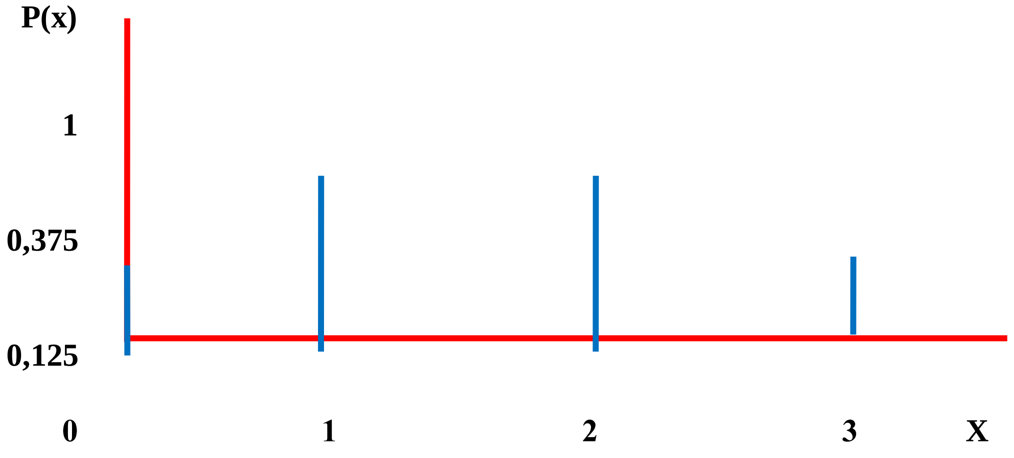
X_i	0	1	2	3	$\sum$
P_i	0,125	0,375	0,375	0,125	1

حيث أنه يجب أن يكون:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x_i) \geq 0} \\ \boldsymbol{\sum p_i = 1} \end{cases}$$

ويسمى هذا أيضا بقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يعرف بالعلاقة التي تربط القيم الممكنة للمتغير العشوائي مع احتمالاتها. حيث يجب أن يكون مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح $\geq$ $(\boldsymbol{(x_i)})$ 0

ويمكن التعبير عن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل للمثال أعلاه في الشكل التالي:



- **تابع التوزيع:**

يعرف تابع التوزيع F للمتغير العشوائي x بأنه الدالة f:R →R حيث /

$$F(a) = P(X \leq a)$$

أي أنه ذلك التابع الذي يشير إلى احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي x قيمة أصغر أو تساوي قيمة a فإذا كان a متغير عشوائي متقطع وكان توزيعه الاحتمالي f فإن F هو تابع التوزيع المعرف كما يلي:

$$F(x) = \Sigma_{x_i \leq x} f(x_i)$$

ويعرف أيضا على أنه ذلك التابع الذي يمكننا من خلاله حساب احتمال المتغير العشوائي x عند أي قيمة أصغر أو تساوي قيمة x

مثال :

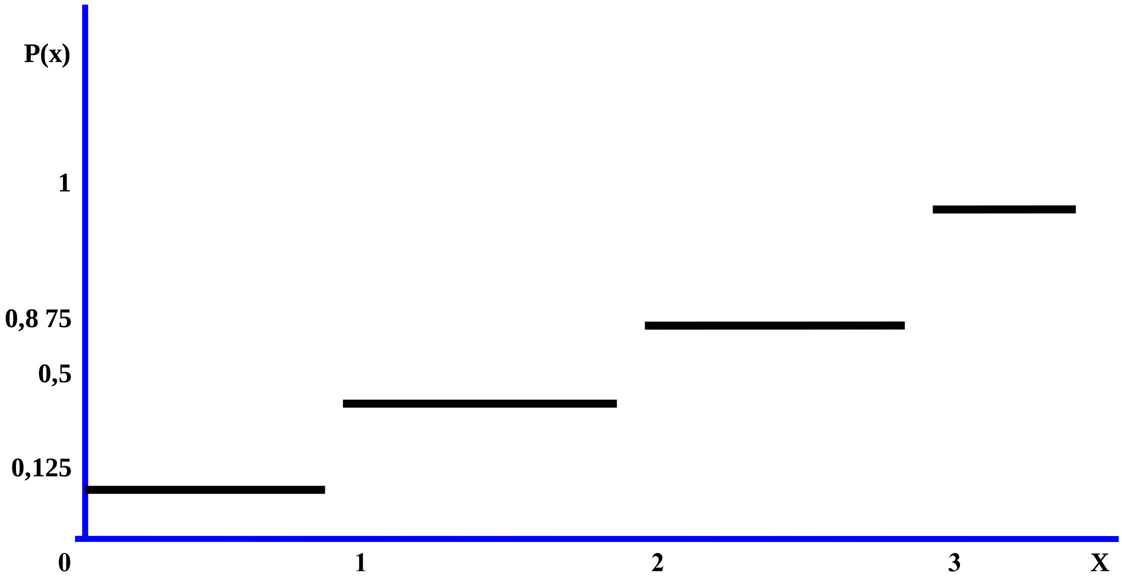
يمكن حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي x في المثال السابق من خلال:

x_i	0	1	2	3	Σ
P_i	0,125	0,375	0,375	0,125	1
$F(x)$	0,125	0,5	0,875	1	/

ويمكن التعبير عنه أيضا في:

$$F(X) = \begin{cases} 0 \\ 0,125 \\ 0,5 \\ 0,875 \\ 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 0 \leq x < 1 \\ 1 \leq x < 2 \\ 2 \leq x < 3 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لتابع التوزيع كما يلي :



فمثلا:

إذا أردنا حساب احتمال $2 \leq \mathbf{x}$ أو احتمال $\mathbf{x} <$ ، فإنه يمكن استنتاجه مباشرة من الجدول أعلاه في السطر الأخير:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} \leq 2) = \mathrm{P}(\mathrm{x} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{x} = 1)\mathrm{P}(\mathrm{x} = 2) = 0,125 + 0,375 + 0,375 = 0,875$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} \leq 1) = \mathrm{P}(\mathrm{x} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{x} = 1) = 0,125 + 0,375 = 0,5$$

- **التوقع الرياضي:**

أحد أهم المفاهيم في نظرية الاحتمالات هو توقع المتغير العشوائي، فإذا كان X متغير عشوائي منفصل له دالة توزيع احتمالي P(X)، فإن القيمة المتوقعة X المشار إليها بـ E(X) يمكن أن نعرفها من خلال :

$$E(x) = \Sigma_{x_i \leq x} \Sigma_{i=1}^{n} P_i \times X_i$$

وبالتالي التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائيX في المثال السابق يساوي:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} \leq 2) = \mathrm{P}(0,125 \times 0) + \mathrm{P}(0,375 \times 1) + \mathrm{P}(0,375 \times 2)\mathrm{P}(0,125 \times 3)$$
$$= 0 + 0,375 + 0,75 + 0,375 = 1,5$$

- **التباين:** على الرغم من أن التوقع الرياضيE(X) للمتغير العشوائي x يمكن أن يعطينا المتوسط المرجح لقيم x ، إلى أنه لا يخبرنا عن اختلاف أو انتشار هذه القيم التي يمكن حسابها بواسطة التباين ويمكن التعبير عنه في:

$$=\mathrm{E}((X^2) - (E(X))^2)\mathrm{V}(\mathrm{x}) = \mathrm{S}^2$$

ويمكن حساب التباين للمتغير العشوائيx، x في المثال السابق من خلال:

$$S^2 = \mathrm{P}(0^2 \times 0,125) + \mathrm{P}(1^2 \times 0,375) + \mathrm{P}(2^2 \times 0,375)\mathrm{P}(3^2 \times 0,125)$$
$$- (1,5)^2 = 0 + 0,375 + 1,5 + 1,125 - 2,25 = 0,75$$

- **الانحراف المعياري:** الانحراف المعياري هو عبارة عن جدر التباين، ويعرف رياضيا بواسطة العلاقة التالية:

$$\sigma(\mathrm{x}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{x})}$$

وبالتالي يمكن حساب الانحراف المعياري في المثال السابق كما يلي:

$$\sigma(x) = \sqrt{0,75} = 0,86$$

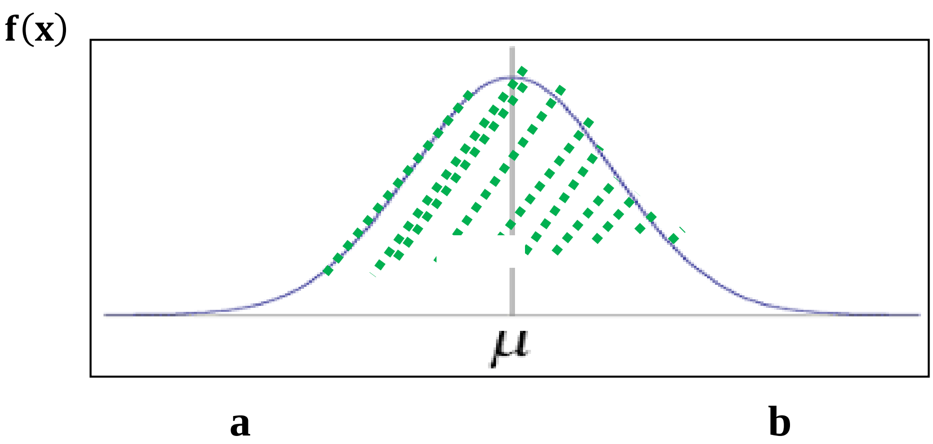
ب- ***المتغير العشوائي المتصل:*** المتغير العشوائي المتصل **x** هو المتغير الذي يأخذ عدد لانهائي من القيم داخل مجاله . وتوجد الكثير من الأمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة، مثلا وزن مجموعة من الطلبة، دخل الأسر في ولاية معينة، الوقت الذي تصل فيه طائرة معينة إلى المطار .....الخ. فإذا كان **x** متغير عشوائي، يمكننا القول أن **x** هو متغير عشوائي مستمر إذا كانت هناك دالة غير سالبة F معرفة لكل عدد حقيقي لأي مجموعة A من الأعداد الحقيقية، ويعرف رياضيا بواسطة المعادلة التالية:

$$f(x) = P(x \in A) = \int_A f(x)dx$$

حيث تتميز الدالة $f(x)$ بالخاصيتين التاليتين:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

تسمى الدالة f دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي x وتأخذ التمثيل البياني التالي:



حيث تعبر المساحة المظللة عن مجموع الاحتمالات الكلية وتساوي الواحد الصحيح. وحساب هذه المساحة حيث يكون n عدد كبير جدا يكون من خلال تابع رياضي للمتغير العشوائي x كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} f(x) & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

من خلال هذا القانون يمكننا حساب احتمالات المتغير العشوائيX لأي مجال جزئي محصور بين النقطتين a و b:

$$P(x = 0) = \int_b^a f(x)dx$$

فإذا كانت a=b يمكن حساب الاحتمال$P(X = a)$ من خلال:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_b^a f(x)dx = 0$$

ويمكن حساب الاحتمال$P(X < a)$ أيضا من خلال:

$$P(x < 0) = (x \leq 0) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

مثال:

أحسب الثابت **K**، إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية؟ مثل دالة الكثافة الاحتمالية بيانيا؟ احسب الاحتمال $P(1 \leq x \leq 2)$ ؟

$$f(\mathrm{X}) = \begin{cases} \mathrm{k}(x^2) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

الحل:

1- حساب قيمة الثابت K:

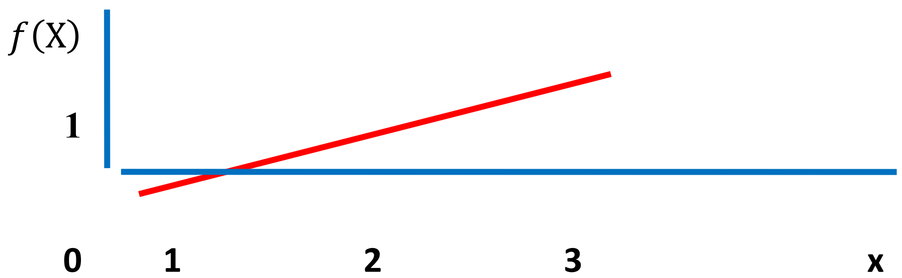
بما أن $k \geq 0$ فإن الخاصية الأولى دوما محققة. وبالتالي يجب أن تحقق$f(\mathrm{X})$ ، الخاصية الثانية حتى تكون دالة كثافة احتمالية، وبالتالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 = \int_3^0 k(x^2)dx = \left[\frac{k(x^2)}{3}\right]_3^0 = 1 = 9k = 1 = k = \frac{1}{9}$$

وبالتالي يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية كما يلي:

$$f(\mathrm{X}) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x^2) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

2- التمثيل البياني:



3- حساب الاحتمال $P(1 \leq x \leq 2)$:

-4

$$P(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{9}(x^2)dx = \left[\frac{(x^3)}{27}\right]_1^2 = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{17} = 0,25$$

1-3: تابع التوزيع: إذا كان x متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية $f(\mathrm{X})$ لمتغير العشوائي x في المثال أعلاه من خلال:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

مثال:

يمكننا حساب تابع التوزيع $f(\mathrm{X})$ للمتغير العشوائي x في المثال أعلاه من خلال:

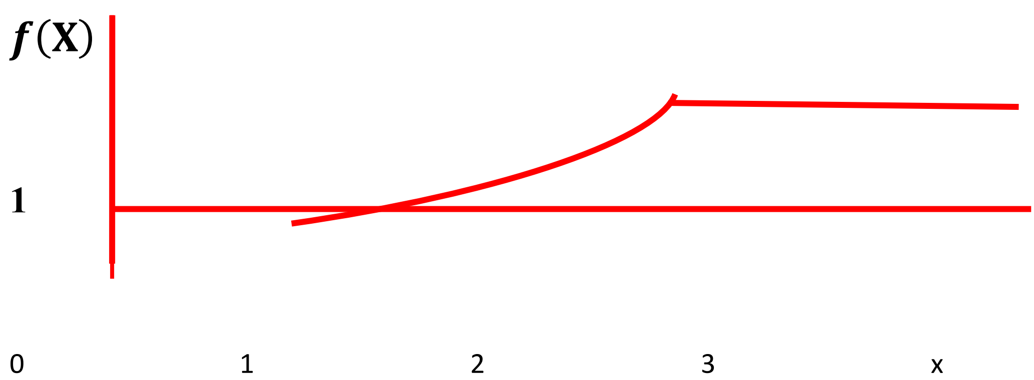
$$f(\mathrm{X}) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x^2) & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{X} f(x)dx = \int_0^x \frac{1}{9}x^2dx = \frac{X^3}{27}$$

حيث أن: $3 \leq x$ ، وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{X^3}{27} & 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ويمكن تحديد التمثيل البياني لتابع التوزيع في مثالنا هذا في الشكل التالي:



3-2: التوقع الرياضي: إذا كان X تغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمالية $f(X)$ ، فإننا يمكن حساب توقعه الرياضي من خلال القانون التالي:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

مثال: إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية $f(X)$ للمتغير العشوائي x كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

احسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي؟

الحل:

لدينا:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{2} x f\left(\frac{1}{2}x\right) dx = \frac{2x}{2} = \left[\frac{(x^3)}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3} = 1,33$$

3-3: التباين والانحراف المعياري: إذا كان x متغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمالية (X) فإننا يمكن حساب تباينه من خلال القانون التالي:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [E(x)]^2$$

أما الانحراف المعياري فهو جدر التباين:

$$\delta(x) = \sqrt{V(x)}$$

مثال:

احسب التباين والانحراف المعياري في المثال السابق؟

الحل:

إذا كان x متغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمالية $\boldsymbol{f}(\mathbf{X})$، فإننا يمكن حساب تباينه من خلال القانون التالي:

$$\boldsymbol{V(x) = \int_0^2 x^2 f\left(\frac{1}{2}x\right) dx - \left[\left(\frac{4}{3}\right)\right]^2 = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx - \left[\frac{4}{3}\right]^2 = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 - \left[\frac{4}{3}\right]^2 = 2 - 1,77}$$
$$\boldsymbol{= 0,23}$$

ويمكن حساب الانحراف المعياري من خلال:

$$\boldsymbol{\delta(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,23} = 0,47}$$

المتغيرات العشوائية المتصلة:

4- التوزيعات الاحتمالية:

1-3: التوزيعات الاحتمالية المتقطعة: عرفنا المتغير العشوائي على أنه مجموعة من النتائج الممكنة، تكون هذه النتائج مرتبطة باحتمالات معينة، هذه العلاقة تسمى بالتوزيع الاحتمالي. من أهم التوزيعات التي سيتم التطرق لها هي توزيع ذي الحدين، والتوزيع البواسوني على اعتبارهما من أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الأكثر استخداما.

أ- **التوزيع ذو حدين:** يستخدم هذا التوزيع لإيجاد الاحتمالات في الحالات التي يكون للتجربة العشوائية نتيجتان فقط النجاح أو الفشل، ومن الأمثلة عن توزيع ذي الحدين نذكر:

- عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان (ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة)
- نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح، رسوب)
- نتيجة سباق الجري (الفوز، الخسارة)

ويمكن تطبيق توزيع ذي الحدين إذا تحققت الشروط التالية:

- يجب أن تكون ال نتيجتان متنافيتان لكل محاولة.
- المحاولات تكون مستقلة عن بعضها البعض .
- احتمال وقوع حادث معين في كل محاولة ثابت ولا يتغير من محاولة لأخرى.

فإذا افترضنا أن نتيجتي التجربة هما النجاح والفشل باحتمالين ثابتين P و $q = 1 - P$ ، على التوالي. وأن x متغير عشوائي يعبر عن حالات النجاح في n، محاولة، فإنه يمكننا حساب الاحتمال، $P(X = x) = f(x)$، بواسطة القانون التالي:

$$\boldsymbol{P(x) = C_n^x P^x (1 - P)^{n-x}}$$

ويكون التوقع الرياضي والتباين لتوزيع ذي الحدين كما يلي:

$$\mathbf{E(x) = np}$$
$$\mathbf{V(x) = np(1 - p)}$$

فإذا كان $q = 1 - P = 0,5$، فإن توزيع ذي الحدين يكون متماثلا، وإذا كان $P < 0,5$ ، كون التوزيع ملتويا نحو اليمين، أما إذا كان $P > 0,5$ ، يكون التوزيع ملتويا نحو اليسار.

مثال:

إذا كانت نسبة نجاح الطلبة الذين يحضرون المحاضرة في مقياس الإحصاء به 0,6، وإذا كان عدد الطلبة الذين يحضرون المحاضرة بانتظام هو 10 طلبة. فإذا افترضنا المتغير العشوائي x، يمثل عدد الطلبة الناجحين الذين يحضرون المحاضرة

1. حدد شكل دالة الاحتمال $\boldsymbol{f}(\mathbf{X})$ لهذا المتغير.

2. احسب الاحتمالات التالية:
- ما هو احتمال نجاح 3 طلبة الذين يحضرون المحاضرة ؟
- ما هو احتمال نجاح طالب واحد على الأقل؟
- ما هو احتمال نجاح طالبين على الأكثر من الذين يحضرون المحاضرة ؟
3. احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الطلبة الناجحين.
4. حدد شكل التوزيع.

الحل:

1- شكل دالة الاحتمال $f(X)$، لهذا المتغير:

n= 10، $q = P - 1 = 0,4$، P= 0,6، وبالتالي:

$$P(x) = C_n^x P^x(1-P)^{n-x} = C_{10}^x 0,6^x(0,4)^{10-x}$$

X= 0,1,2,3,.........,10

2- حساب الاحتمالات:

- **حساب احتمال نجاح 3 طلبة الذين يحضرون المحاضرة:**

$$P(3) = C_{10}^3 0,6^x(0,4)^{10-3} = 120 \times 0,216 \times 1,6384 \times 10^{-3} = 0,04$$

- **حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل:**

$$P(x \geq 1) = C_{10}^3 0,6^x(0,4)^{10-3} = 1 - f(0)$$

$$P(x \geq 1) = 1 - C_{10}^0 0,6^0(0,4)^{10-0} = 1 - 1 \times 1 \times 1,048576 \times 10^{-4} = 0,99$$

- **حساب احتمال نجاح طالبين على الأكثر من الذين يحضرون المحاضرة:**

$$P(x \leq 2) = f(2) + f(1) + f(0)$$

$$P(x \leq 2) = C_{10}^2 0,6^2(0,4)^{10-2} + C_{10}^1 0,6^1(0,4)^{10-1} + C_{10}^0 0,6^0(0,4)^{10-0}$$
$$= 0,01$$

- **حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الطلبة الناجحين:**
- **التوقع الرياضي:**

$$E(x) = np = 10 \times 0,6 = 6$$

- **التباين**

$$V(x) = np(1-p) = 10 \times 0,6 \times 0,4 = 2,4$$

- **الانحراف المعياري**

$$\delta(x) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2,4} = 1,54$$

- **تحديد شكل التوزيع:**

بما أن: $P = 0,6 > 0,5$ ، فإن توزيع عدد نجاح الطلبة سالب الالتواء.

ب- . <u>**التوزيع البواسوني:**</u> يستخدم هذا التوزيع لتحديد احتمال عدد معين من الأحداث (النجاحات في) وحدة من الزمن، وذلك عندما تكون الأحداث مستقلة عن بعضها البعض ويبقى متوسطها ثابتا لوحدة من الزمن. مثل عدد حوادث السيارات خلال السنة، عدد المكالمات خلال شهر.......الخ.

$$/ \ x=1,2,3,.........n \quad P(x) = \frac{\lambda^{-X} \times e^{\lambda}}{X!}$$

<u>**حيث أن:**</u>

X: العدد المعين من النجاحات

P(x): احتمال x عدد من النجاحات

E **:** أساس نظام اللوغاريتم الطبيعي أو 2,71828

λ: متوسط عدد النجاحات في وحدة الزمن.

مثـــال:

إذا كـان عـدد حـوادث السـيارات في مدينـة معينـة يتبـع التوزيـع البواسـوني بمتوسـط 5 حـوادث، خلال الأسبوع. إذا افترضنا أن x متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السيارات خلال أسبوع

1- حدد شكل دالة الاحتمال $\boldsymbol{f}(\mathbf{X})$ لهذا المتغير ؟
2- أحسب الاحتمالات التالية :
   - ما هو احتمال حدوث حادثين خلال أسبوع؟
   - ما هو احتمال حدوث حادث واحد على الأقل خلال أسبوع؟
   - ما هو احتمال حدوث ثلاثة حوادث على الأكثر خلال أسبوع؟
3- احسب التوقع الرياضي ، التباين والانحراف المعياري لعدد الحوادث؟
4- حدد شكل التوزيع؟

الحل:

1- **شكل دالة الاحتمال**

بما أن متوسط عدد حوادث السيارات خلال أسبوع هو x = 5، وبالتالي تكون دالة الاحتمال:

$$/\ \mathbf{x=1,2,3,\ldots\ldots\ldots n} \boldsymbol{P}(\mathbf{x}) = \frac{\lambda^{-X}\times e^{\lambda}}{X!}$$

$$/\ \mathbf{x=1,2,3,\ldots\ldots\ldots 5.} \boldsymbol{P}(\mathbf{x}) = \frac{5^{x}\times e^{-5}}{X!}$$

2- **حساب الاحتمالات:**

أ- **احتمال حدوث حادثين خلال أسبوع هو**

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x} \geq \mathbf{1}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{5^0 \times e^{-5}}}{\mathbf{0!}} = \mathbf{0,99}$$

ب- **احتمال حدوث ثلاثة حوادث على الأكثر خلال أسبوع هو**

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x} \leq \mathbf{3}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{3}) + \boldsymbol{f}(\mathbf{2}) + \boldsymbol{f}(\mathbf{1}) + \boldsymbol{f}(\mathbf{0})$$

$$= \frac{5^3\times e^{-5}}{3!} + \frac{5^2\times e^{-5}}{2!} + \frac{5^1\times e^{-5}}{1!} + \frac{5^0\times e^{-5}}{0!} = \mathbf{0,25}$$

ج- **حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الحوادث**

- **التوقع الرياضي**

$$\mathbf{E(x) = \lambda = 5}$$

- **التباين:**

$$\mathbf{V(x) = \lambda = 5}$$

- **الانحراف المعياري:**

$$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) = \sqrt{\boldsymbol{\lambda}} = \sqrt{\mathbf{5}} = \mathbf{2,23}$$

3- **تحديد شكل التوزيع:**

التوزيع البواسوني دائما موجب الالتواء

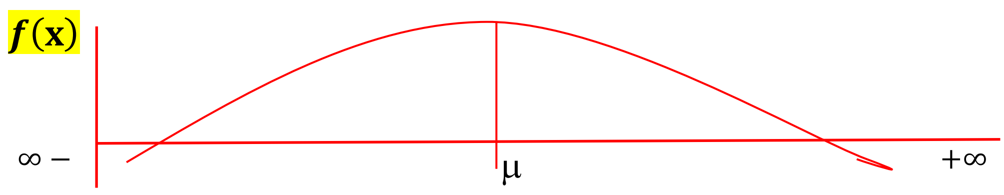
2-3: التوزيعات الاحتمالية المتصلة: يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي تستخدم على نطاق واسع في التحليل الإحصائي. وهو جرسي الشكل متماثل حول الوسط الحسابي، ويمتد إلى ما لانهاية على الجانبين، ولكن أغلب المساحة (الاحتمال) ترتكز حول الوسط الحسابي. كما أن معظم التوزيعات الاحتمالية الأخرى يمكن تقريبها إلى التوزيع الطبيعي) ويعر ف بالقانون التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)^2}{\delta^2})}$$

حيث أن: $-\infty < x < +\infty$، $\pi = \frac{22}{7}$

μ: يمثل الوسط الحسابي

والتمثيل البياني للتوزيع الطبيعي يكون على شكل جرس كما يلي:



ونظرا لصعوبة حساب التكامل لإيجاد الاحتمال عندما يكون المتغير العشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي، لجأ علماء الإحصاء إلى تحويل التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي القياسي وهو توزيع طبيعي وسطه الحسابي يساوى 0 وانحرافه المعياري يساوي 1. ويمكن تحويل أي توزيع طبيعي بوحدات x إلى توزيع طبيعي قياسي Z ، فمثلا لحساب الاحتمالات في حالات تحتوي على التوزيع الطبيعي، نقوم بتحويل أولا قيم x إلى قيم z المناظرة لها، كالآتي:

$$Z = \frac{X-\mu}{\delta}$$

قيمة Z يمكن إيجادها باستخدام الجداول الإحصائية، التي تعطي قيمة الجزء من المساحة (الاحتمال) تحت المنحنى بين قيمة الوسط الحسابي وقيمة Z، وكثافة احتماله تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

<u>ملاحظة:</u> يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع ذي الحدين عندما يكون:

$$n \geq 30\,, \qquad np > 5, \qquad n(1-P) > 5$$

كما يمكن استخدام أيضا التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع البواسوني عندما يكون:

$$\lambda \geq 10$$

<u>مثـــال:</u>

إذا كانت علامات الطلبة في قسم معين تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي يساوي 10 وتباين يساوي 4

- حدد معالم التوزيع الاحتمالي لعلامات الطلبة؟
- حدد شكل دالة كثافة الاحتمال؟
- احسب احتمال أن تكون علامات الطلبة بين 8 و 12؟
- ما هو احتمال أن تكون علامات الطلبة أقل أو يساوي 6؟

<u>الحل:</u>

- **تحديد معالم التوزيع الاحتمالي لعلامات الطلبة:**

بما أن علامات الطلبة هي متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي فإن معالمه تكون كالأتي:

التباين، $\delta^2 = 4$ والوسط الحسابي= $\mu = 10$ ، وبالتالي: $N(\mu, \delta) = (10,2)$

- **تحديد شكل دالة كثافة الاحتمال:**

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-10)^2}{4})}$$

- **احتمال أن تكون علامات الطلبة بين 8 و 12 هو:**

نقوم بحساب أولا قيمة z لمناظرة لقيم x وهي 0 و 12 ثم نجد القيم التي تناظر قيم z في الجداول الإحصائية كما يلي:

$$Z_1 = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{8-10}{2} = -1 \ \ / Z_2 = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{12-10}{2} = 1$$

عند $Z = 1$ يمكننا الحصول على القيمة 0,3413 من الجداول الإحصائية. هذا يعني أن احتمال أن تكون العلامات هو 12 و 8 (0,3413+0,3413)

$$p(8 < x < 12) = 0,6826$$

- **احتمال أن تكون علامات الطلبة أقل أو يساوي 6 هو**

$$Z = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{6-10}{2} = -2$$

عند $Z = 2$ يمكننا الحصول على القيمة 0,4772 من الجداول الإحصائية. هذا يعني أن احتمال أن تكون العلامات أقل من 6 هو:

$$p(x \leq 6) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228$$

تم بعون الله إنهاء البرنامج الدراسي، حسب المقرر الوزاري والخاص بعلم الاجتماع جذع المشترك

أما نظرية المعاينة فقد تم تناولها في الفصل الأول، وفي الختام تتمنى الأستاذة الصحة والعافية لكم ، والمزيد من النجاح لكم جميعا ، وأرجو من المولى عز وجل أن يوفقكم في دروسكم وامتحاناتكم كما اشكر جميع الطلبة الذين تواصلوا معي ، وأقول لكم شكرا لكم جميعا وحظ موفق