جامعة الجزائر 2 أبو القاسم سعد الله
كلية الاجتماعية
قسم علم الاجتماع والديمغرافيا
سنة أولى ماستر ل م د
د. يمينة مختار
harounia@gmail.com

دروس في الاحصاء السداسي الثاني

3. مقاييس التشتت:

توضح مقاييس التشتت مدى تباعد قيم اي توزيع عن بعضها البعض ومتوسط تباعد هذه القيم عن وسطها الحسابي وبذلك تكون قد اعطت فكرة عن مدى تجانس أو تباين هذه القيم ويمكن تقسيم مقاييس التشتت إلى فئتين:

أ. مقاييس لا يستخدم فيها المتوسط الحسابي:

وتتمثل في المدى المطلق والمدى الربيعي

- **المدى المطلق**

المدى المطلق= أكبر قيمة – أقل قيمة أي $EG=H-L$

ويعتمد في هذا المقياس قيمتين فقط أكبر قيمة وأقل قيمة في التوزيع لذا فهو لا يعطي نتيجة دقيقة عن تباين القيم

مثال: لدينا عينتين متماثلتين متساويتين ومتساويتين من حيث الحجم

مج$_1$: 16 12 11 11 10 7 5 6 5 3 2 2

مج$_2$: 16 14 12 12 12 11 10 10 8 8 2

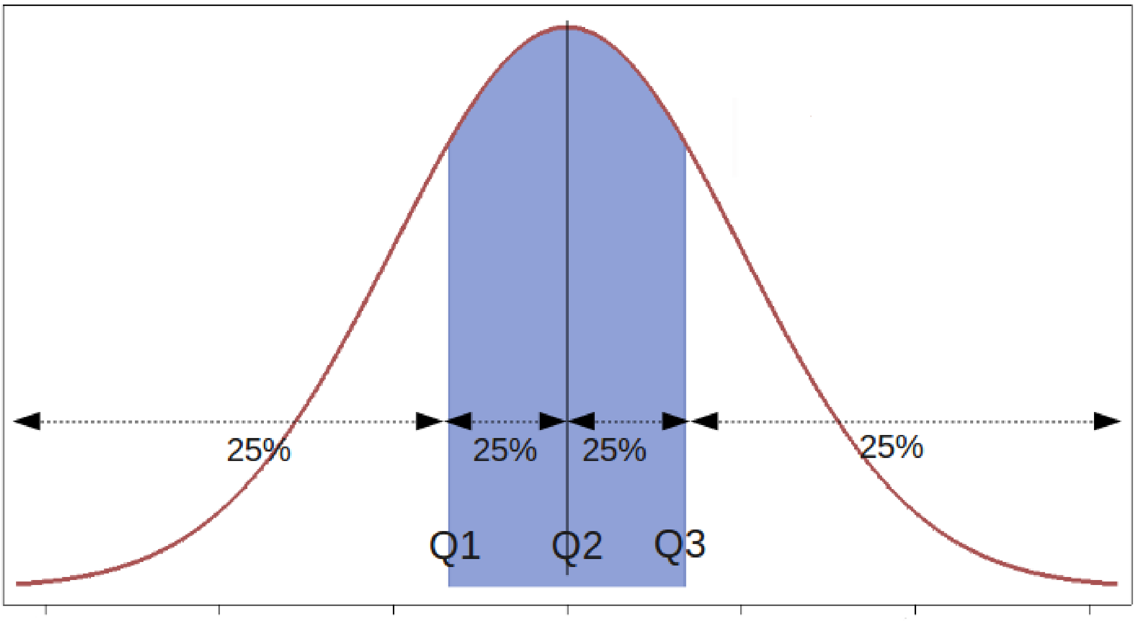
باستخدام معادلة المدى المطلق في كلتا المجموعتين يصبح لدينا: $EG=16-2=14$

المدى المطلق للمجموعتين هو 14 لكن عند التركيز في توزيع القيم في كلا المجموعتين نلاحظ أن التباين بين قيم المجموعة الأولة أكبر من المجموعة الثانية التي تعتبر متجانسة نوعا ما ولتجنب هذا العيب يرجع الباحثين إلى حساب المدى الربيعي

- **المدى الربيعي:**

هو حاصل طرح الربيع الأول من الربيع الثالث $EQ=Q_3-Q_1$

و تحسب الربيعيات على أساس تقسيم المنحنى أو التوزيع إلى أربعة أجزاء وبنفس المنطق الذي حسبنا به الوسط Md حيث قسمنا المنحنى إلى جزئين لذلك فان معادلة حساب الربيعيات لا تختلف كثير عن معادلة الوسيط حيث أن الوسيط يمثل الربيع الثاني



L: الحد الأدنى الفعلي للفئة الربيعية

n: حجم العينة

nw: التكرار الأصلي للفئة الربيعية

nb: التكرار المتجمع الصاعد للفئة الربيعية

Δ: طول الفئة

وتحل المعادلة بنفس طريقة حساب الوسيط من مقاييس النزعة المركزيةوفي الأخير نحصل على المدى الربيعي الذي هو حاصل طرح الربيع الأول من الربيع الثالث $EQ=Q_3-Q_1$

تطبيق:

لدينا التوزيع التالي:

الفئات	fi	xi	fixi	fc+
4−2	7	3	21	7
7−5	6	6	36	13
10−8	10	9	90	23
13−11	5	12	60	28
16−14	4	15	60	32
20−17	4	18,5	74	36
المجموع	36		341	

المدى العام $EG=20-2=18$

المدى الربيعي $EQ=Q_3-Q_1$

الربيع الأول

اذن الفئة الربيعية الأولى هي {8−10} وحدودها الفعلية هي {7,5 − 10,5}

الربيع الثاني:

اذن الفئة الربيعية الثالثة هي {11 − 13} وحدودها الفعلية هي {10,5 − 13,5}

Q

وبهذا يكون المدى الربيعي $EQ=Q_3-Q_1=12,9-5,5=7,4$

ب. مقاييس تشتت يستخدم فيها المتوسط الحسابي:

أغلب الدراسات في العلوم الاجتماعية تعتمد على هذا النوع من المقاييس لأنها تأخذ بعين الاعتبار كل قيم التوزيع أو القيم المحولة الناتجة عنها وأكثر احصاءاتها الانحراف المعياري

- **الانحراف المعياري:**

نرمز له بـ S وهو متوسط انحراف القيم عن متوسطها الحسابي والانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين الذي يمكن تعريفه على أنه مجموع مربع انحراف كل القيم عن المتوسط الحسابي ويرمز له بـ S^2 لذلك يمكن حساب اما التباين أو الانحراف المعياري حسب طبيعة المعلومات اذا كانت مرتبة أو مبوبة

❖ في البيانات المرتبة نحسب التباين من خلال المعادلة التالية:

مثال:

الأفراد			
1	2	6−	36
2	3	5−	25
3	6	2−	4
4	7	1−	1
5	11	3	9
6	13	5	25
7	14	6	36
المجموع	56	0	136

وبالتالي S=4.76

❖ التباين في حالة البيانات المرتبة بتكرارات

يحسب التباين في هذه الحالة من خلال المعادلة التالية:

❖ التباين في حالة البيانات المبوبة

في حالة البيانات المبوبة نستخدم أحد المعادلتين التاليتين:

$$S^2 = \frac{\sum(f_i X_i^2) - n\bar{X}^2}{n-1}$$

X_i مركز الفئة

f_i تكرار الفئة

n حجم العينة

$\bar{X}$ المتوسط الحسابي

وانطلاقا من هذا التباين يمكن حساب الانحراف المعياري بـ $S^2 = \sqrt{S^2}$

أو

تمارين حول مقاييس التشتت:

التمرين 1:

انطلاقا من القيم التالية: أحسب التباين والانحراف المعياري

72 78 61 86 75 98 72 38 84 80 95 88 87 72

التمرين 2:

لدينا أطوال مجموعة من الأطفال كالتالي

98 78 67 84 86 80 87 88 75 73 95 72 83

- ما هو متوسط طول العمر لهؤلاء الاطفال؟
- ما هي القيمة الوسطى لهذا التوزيع
- ما هي قيمة الانحراف المعياري لهذا التوزيع

التمرين 3:

تمثل البيانات التالية انتاجية أحد المصانع لقطع معدنية خلال يوم واحد

الفئات	التكرارت
50 - ,,	3
	5
	8
	20

	26
	18
	16
	5
85 - ..	**2**
المجموع	**103**

- أكمل الجدول
- أحسب المتوسط الحسابي
- أحسب الوسيط
- أحسب المنوال

هل يوجد تباين في انتاجية العمال؟

الاحصاء الاستدلالي

1. المبدأ الأساسي للعد

يعتبر المبدأ الأساسي للعد أمرا بالغ الأهمية في عناصر نظرية الاحتمالات التي سوف نتطرق إليها، والذي ينص على أنه إذا كانت النتائج الممكنة لتجربة ما هي n_1، والنتائج الممكنة لتجربة أخرى هي n_2

فإن النتائج الممكنة للتجربتين معا هي $n_1 \times n_2$

مثال 1: إذا كان لدينا امتحان الإحصاء متكون من تمرينين، حيث أن التمرين الأول متكون من 3 أسئلة والتمرين الثاني من 4 أسئلة .فإذا طلب من الطلاب الإجابة على سؤال واحد على الأكثر من كل تمرين .

ما هي عدد الحالات الممكنة لحل هذا الامتحان؟

حسب قاعدة المبدأ الأساسي للعد يكون للطالب 3 حالات لحل التمرين الأول نرمز لها ب n_1، و 4 حالات لحل التمرين الثاني نرمز لها ب n_2 ولحل التمرينين معا يكون للطالب n :

$$n = n_2 \times n_1 = 3 \times 4 = 12$$

مثال 2:

إذا كانت لدينا تجربة متمثلة في رمي قطعة نقود وحجرة ندر في آن واحد، ما هي عدد الحالات الممكنة:

لدينا قطعة النقود يمكن أن تقع أحد الوجهين (H, T) بينما حجرة النرد يمكن أن تقع على أحد الوجوه الستة (1, 2, 3, 4, 5, 6) ومنه فإن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هي: $n = n_2 \times n_1 = 2 \times 6 = 12$

2. التباديل

سوف نميز هنا بين نوعين من التباديل:

- التباديل دون تكرار
- التباديل مع تكرار

أ. التباديل دون تكرار

يمكن أن نسمي ترتيب n من العناصر المختلفة بأنه تبديلة هذه العناصر مأخوذة k في كل مرة، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر أي$n=k$ أي هي عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف ترتيب أحد هذه العناصر على الأقل ويعبر عنها بالعلاقة التالية: $P_n = n!$

$n!$: عاملي أو مضروب n: حيث أن

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 2$$
$$3! = 6$$
$$4! = 24$$
$$5! = 120$$
$$6! = 720$$
$$7! = 5040$$
$$8! = 40320$$
$$9! = 362880$$
$$10! = 3628800$$

مثال : ما هي عدد الطرق الممكنة لترتيب مجموعة الحروف n=(a .b.c)

من خلال العد المباشر نحصل على 6 طرق (c.b.a) (c.a.b) (b.a.c) (b.c.a) (a.c.b) (a .b.c)

كل واحدة من هذه الترتيبات يعرف بالتبديلة، حيث أنه هناك 6 تبديلات ممكنة من مجموعة من 3 عناصر مختلفة، ويمكن الحصول على هذه النتيجة أيضا من قاعدة المبدأ الأساسي للعد، حيث يتم اختيار الحرف الأول ب 3 طرق ويبقى لنا حرفين لاختيار الحرف الثاني وحرف واحد لاختيار الحرف الثالث.

مثال : كم كلمة يمكن تشكيلها من الحروف التالية (S.K.L.M .H) قد لا يكون للكلمة معنى في هذه الحالة يمكن اختيار الحرف الأول ب 5 طرق مختلفة وتبقى لنا 4 طرق مختلفة لاختيار الحرف الثاني لأن الحرف الذي اخترناه في الأول لا يكون ضمن الحروف المتبقية و3 لاختيار الحرف الثالث وهكذا حتى يتم أخذ جميع الحروف، ويمكن التعبير عن ذلك في:

$$5x4x3x2x1=120 \quad \text{أي} \quad P5 = 5\,! = 5x4x3x2x1 = 120$$

نفترض الآن أنه لدينا عنصر n، في هذه الحالة يمكن التعبير عن الصيغة العامة للتبديلة P_n بنفس الطريقة المتبعة في المثال السابق حيث يتم اختيار العنصر الأول ب n طريقة مختلفة، وثم يتم اختيار العنصر الثاني بطرق عددها (n−1) وبعد ذلك يمكن اختيار العنصر الثالث بطرق عددها (n−2) ونستمر على هذا المنوال حتى نصل إلى العنصر الأخير الذي تبقى لنا طريقة واحدة لاختياره بـ (n−k+1) والصيغة العامة للتبديلة تعطى في المعادلة التالية:

$$Pn=n\,!=n(n-1)(n-2)(n-3).....(n-k+1)$$

أما إذا كان $k < n$ فإن الصيغة العامة تصبح

$$Pn=n\,!=n(n-1)(n-2)(n-3).....(n-k+1)=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-k+1)(n-k)!}{(\mathrm{n-k})!}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال : إذا كانت لدينا الأرقام التالية .(7 ,1 ,3 ,9 ,6 ,4) كم عددا مكونا من 3 أرقام يمكن تشكيله من هذه الأرقام؟

في هذه الحالة نحن نريد اختيار مجموعة جزئية من الأرقام k من المجموعة الكلية n حيث $k < n$ حيث اختيار رقم الميئات ب 6 طرق ورقم العشرات ب 5 طرق ورقم الآحاد ب 4 طرق. $6x5x4=120$

وبتطبيق القانون الأخير نحصل على نفس النتيجة:

$$P(n.k)=\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6x5x4x3!}{3!}=120$$

ب. التباديل مع تكرار

في بعض الحالات لا يمكن أن نفرق بين عناصر المجموعة n أي عندما تكون العناصر متماثلة في هذه الحالة يمكن معرفة عدد التباديل من خلال الصيغة العامة التالية:

حيث أن: من n_1 إلى n_k تمثل العناصر المتماثلة $n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k=n$

مثال: ما هو عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من كلمة proposition

لدينا الحرف P تكررة مرتين، أي $n_{1=2}$ والحرف O تكرر ثلاث مرات أي $n_2=3$ وهكذا وبتطبيق القانون تصبح المعادلة

P_{11}^{232}

3. التراتيب

في الكثير من الحالات في نظرية الاحتمالات خاصة في التحليل التوافقي نصادف تجارب تتمثل في اختيار مجموعة جزئية k عنصر من مجموعة كلية متكونة من n حيث n≤k مثل اختيار 3 كرات من وعاء فيه n من الكرات عنصر، تسمى عملية الاختيار هذه بالترتيبة، ويوجد نوعين من التراتيب

- التراتيب مع إعادة.
- التراتيب بدون إعادة.

أ. التراتيب مع إعادة

إذا كانت التجربة متمثلة في سحب كرات من إناء فيه n من الكرات مثلا، في هذه الحالة عند إجراء التجربة تعاد الكرة المسحوبة إلى الإناء بعد كل سحبة، وبما أنه توجد n طريقة مختلفة لاختيار كل كرة فبتطبيق المبدأ الأساسي للعد نحصل على:

$$n \times n \times n \ \ldots\ldots\ldots\ n = n^k$$

ويمكن التعبير عنها بالصيغة التالية: $AR_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \mathrm{n}^{\mathrm{k}}$

مثال: ما هي عدد الأعداد المشكلة من 3 أرقام التي يمكن تكوينها من الأرقام الزوجية في القاعدة العشرية؟

في هذه الحالة الأرقام الزوجية في القاعدة العشرية تمثل المجموعةn
هي {2, 4, 6, 8} =n والمجموعة الجزئية k=3 وتطبيق قانون الترتيبة مع اعادة نحصل على $AR_4^3 = 4^3 = 64$

مثال2: ما هي عدد المجموعات الجزئية المشكلة منk=2 التي يمكن تكونها من الحروف التالية{n={a .b.c ، يسمح باعادة الحرف أكثر من مرة

من خلال العد المباشر نحصل على 9 ثنائيات متمثلة في (c.c) (c.b) (c.a) (a.a) (a.b) (a.c) (b.a) (b.b) (b.c)

وبتطبيق قانون الترتيبة مع الإعادة نحصل على: $AR_3^2 = 3^2 = 9$ أي 9 ثنائيات

ب. **التراتيب دون إعادة**

في هذه الحالة يجب عدم إعادة العنصر المسحوب إلى المجموعة n وبذلك لا تكون هناك إعادة للعناصر، حيث أن السحبة الأولى تكون من المجموعة n والسحبة الثانية تكون من المجموعة n−1 وهكذا حتى السحبة الأخيرة التي تكون من المجموعة n−k+1 ويمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية: $AR_{\mathrm{n}}^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

وهو نفس القانون الذي تطرقنا إليه في التبديلة بدون تكرار.

ملاحظة :هناك العديد من الكتّاب في نظرية الاحتمالات لا يفرقون بين التبيدلة والترتيبة حيث يعتبرانهما نفس الشيء.

مثال : ما هي عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها(قد لا يكون للكلمة معنى) المتكونة من5 و 3 حروف، من كلمة mathemathique بدون اعادة الحروف؟

في الحالة الأولى لدينا n=12 و k=5 وبتطبيق قانون الترتيبة دونة اعادة نحصل على

في الحالة الثانتية لدينا n=12و k=3 وبتطبيق قانون الترتيبة دون اعادة نحصل على

4. التوفيقة:

فرضا أنه لدينا n من الأشخاص ونود تشكيل لجنة متكونة من k شخص ما هو عدد اللجان التي يمكن تكوينها ؟

نلاحظ أن حساب عدد اللجان هو نفس مشكلة تكوين مجموعة جزئية من k عنصر من المجموعة الكلية n ، لكن تشكيل التوفيقة يختلف عن تشكيل التبديلة من حيث أنه في التوفيقة لا نأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر .على سبيل المثال، ما هي عدد التباديل المكونة من k=2، التي يمكن تشكيلها من الحروف {n= {a.b.c.d ؟

من خلال العد المباشر نحصل على 12 تبديلة كالأتي: ab.ac.ad.ba.cb.bd.ca.cb.cd.da.db.dc

أما عندما نريد حساب التوافيق المكونة من k=2 فنحصل على 6 توفيقات فقط وهي: ab.ac.ad.ba.cb.bd

يمكن توضيح العلاقة بين التبديلة والتوفيقة في الجدول التالي:

التباديل	التوافيق
ab.ba	ab
ac.ca	ac
ad.da	ad
bc.cb	bc
bd.db	bd
cd.dc	cd

نلاحظ أن كل توفيقة مكونة من حرفين تحدد2=! 2 تبديلتين للحروف الموجودة في التوفيقة، وهذا يعني أن عدد التوافيق مضروب في ! 2 يساوي عدد التباديل أي $\mathrm{P}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = C_n^k \times 2!$

وبما أن كل توفيقة مجموعة n من العناصر مأخوذة k في كل مرة تحدد ! k من التباديل نستنتج أن $\mathrm{P}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = C_n^k \times k!$

وبالتالي نحصل على قانون التوفيقة $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

مثال: ما هي عدد اللجان المختلفة المشكلة من 4 أفراد التي يمكن تكوينها من مجموعة متكونة من 10 أشخاص

لدينا n=10، و k=5 وبتطبيق قانون التوفيقة نحصل على

اذن لدينا 210 لجنة مختلفة

تمارين للمحاولة:

التمرين الأول:

كم عددا مكون من 3 أرقام يمكن تشكيله من الأرقام التالية 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- لا يسمح بتكرار الرقم؟
- العدد يجب أن يكون أقل من500 ؟
- العدد فردي؟
- العدد زوجي؟

التمرين الثاني:

بكم طريقة يمكن أن يجلس 4 طلبة و 3 طالبات في صف إذا كان:

- الجلوس كما يشاءون؟
- الطلبة جنب بعضهم والطالبات جنب بعضهن؟
- إذا جلس الطلبة فقط جنب بعضهم؟
- طالبان لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما؟

التمرين الثالث:

كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من إعادة ترتيب حروف الكلمة CORONA (قد لا يكون للكلمة معنى)

التمرين الرابع:

نلقي حجرة نرد 10 مرات، بكم طريقة يمكن أن نحصل على الرقم 1 مرتين، الرقم 2 أربعة مرات، الرقم 3 مرة واحدة والرقم 4 ثلاثة مرات؟

التمرين الخامس:

تقدم 4 ذكور و 3 إناث لمقابلة من أجل وظيفة معينة .بكم طريقة يمكن إجراء هذه المقابلة إذا كان:

- في كل مرة مقابلة شخص فقط؟
- في كل مرة لا يتتابع شخصين من نفس الجنس؟

التمرين السادس :

ما هو عدد كلمات السر التي يمكن الحصول عليها من استخدام حرفين من حروف اللغة الإنجليزيةعددها 26 وثلاثة أرقام يسار الأحرف في الحالات التالية:

- عدم تكرار الحرف والرقم؟
- تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم؟
- تكرار الحرف والرقم؟

التمرين السابع: في مسابقة معينة فرض على الطلبة الإجابة على 5 من 8 أسئلة، بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار عدد الأسئلة في الحالات التالية:

- اختيار الأسئلة بدون شرط؟

- إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية؟
- إذا كان من الضروري الإجابة على ثلاثة أسئلة من الأسئلة الخمسة الأولى؟

التمرين الثامن : إذا كان لدينا مجموعة من الطلبة متكونة من 5 طلبة و 7 طالبات . إذا أردنا تكوين لجنة من هؤلاء الطلبة حيث تتكون من 5 أشخاص، ما هي عدد اللجان التي يمكن تكوينها إذا علمت:

- بدون شرط؟
- ثلاثة طلبة يرفضون ترشيحهم؟
- يجب أن يكون ضمن اللجنة طالبين على الأقل؟
- الطالب X والطالبةY يرفضان أن يكونا في اللجنة معا؟

التمرين التاسع:

ما هي عدد أرقام الهاتف ذات العشرة أرقام التي يمكن تكوينها من الأرقام التالية:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 إذا علمت أنه:

- يسمح بتكرار الرقم أكثر من مرة؟
- لا يسمح بتكرار الرقم؟
- يجب أن يبدأ الرقم ب 056 ولا يسمح بتكرار الرقم؟

التمرين العاشر: عميد كلية يريد تشكيل لجنة تضم 5 أعضاء يتم اختيارهم من 5 رجال و 6 نساء.

أ. ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها؟

ب.ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا علمت أن:

- من بين الأعضاء يجب أن يكون رجل فقط؟
- من بين الأعضاء يجب أن تكون امرأتين على الأكثر؟
- يجب أن تتكون اللجنة من رجلين وامرأتين على الأقل؟

ج. ما هو عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم الرئيس، النائب والكاتب؟