وحدة تقنيات و تطبيقات الإحصاء في الديمغرافية لسنة الثانية ليسانس تخصص السكان و الصحة

الفصل الثاني:

د.برادعية صليحة:

أولا– مقاييس التشتت

في الفصل السابق –المتوسطات– تم من خلالها تلخيص بيانات الظاهرة موضوع الدراسة في صورة رقم واحد –الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال...الخ لكن قيم المتوسطات السابقة لا تعطي صورة كاملة عن خصائص أو توزيع الظاهرة موضوع الدراسة، ذلك أنها لا تكفي لإعطاء فكرة لدرجة التجانس أو الاختلاف– التباين– بين قيم هذه الظاهرة، وللأمر السابق أهمية كبيرة خاصة إذا تعلق هذا الأمر بمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات الإحصائية.

1– تعريف التشتت وأهميته:

التشتت في مجموعة من القيم هو التباعد بين مفردات هذه المجموعة أو التفاوت والاختلاف بينها، وهذا التفاوت أو التشتت قد يكون صغيرا إذا كانت قيم مفردات المجموعة قريبة من بعضها البعض، بينما يكون التشتت كبيرا إذا كانت هذه القيم بعيدة عن بعضها البعض.

إن القيمة التي نعتبرها ممثلة لمجموعة من القيم –المتوسطات– لا بد أن تكون مصحوبة بقيمة أخرى تقيس لنا مدى تباعد هذه القيم أو قربها من بعضها أو عن المتوسط، لأنه إذا كبر مقياس التشتت إلى درجة كبيرة، فإن مقياس المتوسط يفقد أهميته كقيمة ممثلة لمجموعة القيم، والعكس صحيح إذا كان مقياس التشتت صغيرا، فتزداد أهمية مقياس المتوسط كقيمة ممثلة لمجموعة القيم (في البحث الإحصائي)، لهذا فإن مقدار التشتت يعتبر مقياسا لقياس التجانس أو تشتت البيانات الإحصائية أو عدم تجانسها في ظاهرة ما.

2- مقاييس التشتت المطلق:

هناك عدة مقاييس إحصائية لقياس التشتت المطلق تختلف فيما بينها من حيث الدقة، والسهولة، والأساس النظري الذي يبنى عليه كل منها، ومن أهمها:

2-1 المدى: ويعتبر من أسهل وأبسط مقاييس التشتت، وإن كان ليس أدقها، ويمثل الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة بين مفردات الظاهرة موضوع الدراسة، أي أن: المدى لمجموعة من القيم = أكبر قيمة – أصغر قيمة (في نفس المجموعة).

مثال: حساب المدى:

فيما يلي التوزيع الطولي لعدد 50 تلميذا بالسنتيمتر بفصول إحدى المدارس في العام 1997/1996.

142	134	154	142	134	151	142	138	130	125
128	153	135	147	138	152	136	150	140	139
132	136	141	153	136	141	131	135	141	134
148	138	146	129	146	145	137	145	144	134
127	143	147	131	140	144	145	144	133	140

أحسب المدى لتوزيع أطوال التلاميذ في الفصل كعينة لأطوال التلاميذ في السنة الدراسية.

الحل: حيث أن أطول تلميذ في المجموعة يبلغ طوله 154 سم، وأصغر تلميذ في المجموعة يبلغ طوله 125 سم، وعليه فإن: المدى = 154-125=29 سم.

ويعيب المدى كمقياس للتشتت المطلق، عدم الدقة، نظرا لاعتماده في القياس على قيمتين فقط-أو حدين فقط-، لذلك عادة ما يستخدم المدى عندما نرغب في قياس تقريبي لمدى تشتت المفردات دون الاهتمام بالدقة في القياس، أو حين يكون للمفردات المتطرفة أهمية خاصة، كتوزيعات درجات الحرارة على سبيل المثال حيث تعلن درجات الحرارة اليومية بأعلى درجة وأدنى درجة (العظمى والصغرى) خلال اليوم كما يشيع استخدام المدى في حالات ضبط مراقبة جودة الإنتاج.

2-2 <u>نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي)</u>: وهو مقياس آخر للتشتت المطلق، وبمقتضاه يتلاشى العيب الموجود بالمدى المطلق السابق، وهو الفرق بين الربيع الأعلى والأدنى في التوزيع التكراري.

الانحراف الربيعي= (قيمة الربيع الأعلى – قيمة الربيع الأدنى)/ 2

أي: $(ر_3 - ر_1)/2$

<u>مثال</u>: حساب نصف المدى الربيعي:

أحسب نصف المدى الربيعي في التوزيع التكراري التالي للأجر اليومي بالدينار لعدد 210 عاملا بإحدى المصانع

الأجر اليومي ف	10-5	20-10	40-20	50-40	60-50	المجموع
عدد العمال ك	20	30	100	20	40	210

<u>الحل</u>:

ف	ك	ت.م.ص
10-5	20	20
20-10	30	50
40-20	100	150
50-40	20	170
60-50	40	210
المجموع	210	

ترتيب $ر_1$= (مج ك)/4 = 210/4 = 52,5

ترتيب $ر_3$ = [(مج ك)/4] × 3 = (210/4) × 3 =157,5

قيمة (ر1) =20 + [(50 – 52,5)/100] × 20

=20 + [(2,5 × 20)/100]

=20+ 0,5 = 20,5 دينار

قيمة (ر3) =40 + [(157,5 – 150)/20] × 10

=40+3,75 = 43,75 دينار

نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي)

=(43, 75 – 20,5)/2 = 23,25/2 = 11,63 دينارا

وعادة ما يستخدم نصف المدى الربيعي في الحالات التالية:

- عندما نستخدم الوسيط كمقياس لمتوسط التوزيع التكراري.
- عندما يكون التوزيع التكراري مفتوحا.
- وأيضا عندما تكون هناك مفردات قليلة متطرفة في مجموعة القيم أو يكون التوزيع شديد الالتواء.
- في حالات البيانات الوصفية القابلة للترتيب.

2-3 الانحراف المتوسط: عند حساب الانحراف المتوسط سنهتم بالقيم المطلقة للانحرافات س–س̄ أي مج س– س̄ وهذا يعني تجريد هذه الانحرافات من إشاراتها الجبرية السالبة وذلك بإهمالها.

وللحصول على الانحراف المتوسط فإننا نقسم مجموع هذه الفروق بعد إهمال إشاراتها السالبة (مج س–س) على عدد القيم ليعطي لنا قيمة الانحراف المتوسط.

2-3-1-الانحراف المتوسط لقيم غير مبوبة:

مثال: حساب الانحراف المتوسط:

أوجد الانحراف المتوسط لدرجات عينة مكونة من 10 طلاب في مادة الرياضيات التالية:

50، 60، 85، 90، 55، 45، 55، 75، 10، 100.

الحل: الانحراف المتوسط = [مجـ|سَ−س|]/ن أو [مجـ | ح |]/ن

حيث س تمثل القيم، سَ تمثل الوسط الحسابي لمجموعة هذه القيم، ن عدد مفردات هذه القيم.

خطوات الحل:

(1) سَ = (مجـ س)/ن = 10/600 = 60 درجة

(2) مجموع انحرافات القيم المطلقة عن وسطها الحسابي

=35+ 0 + 25 + 30 + 5 + 15 + 5 + 15 + 50 + 40

=225

(3) الانحراف المتوسط = (مجـ|س−سَ|)/ن أو (مجـ | ح |)/ن

(متوسط الانحرافات المطلقة) = 225 /10 =22,5 درجة

أي أن التشتت حول الوسط الحسابي يبلغ 22,5 درجة

2-3-2-الانحراف المتوسط للقيم المبوبة (التوزيعات التكرارية):

لإيجاد الانحراف المتوسط من بيانات مبوبة نتبع الخطوات التالية:

- إيجاد الوسط الحسابي (سَ)
- حساب الانحرافات المطلقة | ح | وهي تساوي |س− سَ| حيث س تمثل مراكز الفئات.
- ضرب تكرار كل فئة في انحرافها المطلق المناظر، أي: |س − سَ| ك
- جمع حاصل ضرب كل فئة في انحرافها المطلق المناظر، أي: مجـ(|س− سَ| ك).

أي أن الانحراف المتوسط = [مجـ (|س − سَ|) ك] / مجـ (ك)

مثال: حساب الانحراف المتوسط:

أوجد الانحراف المتوسط لأجر العامل بالدينار من التوزيع التكراري التالي:

فئة الأجر (ف)	5-10	10-20	20-40	40-50	50-60	**المجموع**
عدد العمال (ك)	20	30	100	20	40	210

<u>الحل</u>

ف	ك	مركز الفئات س	س ك	|س− سَ| = ح	|س−سَ|ك أي|ح| ك
10-5	20	7,5	150	24,4	488
20-10	30	15	450	16,9	507
40-20	100	30	3000	1,9	190
50-40	20	45	900	13,1	262
60-50	40	55	2200	23,1	924
المجموع	**210**		**6700**		**2371**

سَ = (مج |ح| ك)/ مج ك = 210/6700 = 31,9 دينار

الانحراف المتوسط= (مج [(س− س ك)])/ مج ك

= 210 /2371

= 11,29 دينارا

لكن نظرا لصعوبة إجراء حسابات هذا المقياس من ناحية، ولإهماله لإشارات الفروق السالبة– وهي عملية غير منطقية– من ناحية أخرى، جعلاه (أي الانحراف المتوسط) مقياس غير شائع الاستخدام بين الإحصائيين.

<u>2-4 الانحراف المعياري</u>:

وهو من أهم وأشهر مقاييس التشتت المطلق على الإطلاق، ويعتمد في قياسه أيضا على مدى تباعد أو تقارب قيم مفردات الظاهرة موضوع القياس عن وسطها الحسابي، كما هو الحال في الانحراف المتوسط، لكن إذا كان الانحراف المتوسط قام على فكرة إهمال الإشارات السالبة للفروق بين القيم ووسطها الحسابي، فإن الانحراف المعياري يقوم على فكرة أخرى وهي تربيع هذه الفروق[*]، وذلك كإجراء للقضاء على تلاشي مجموع الفروق بين القيم ووسطه الحسابي–وبالطبع إجراء عملية تربيع الفروق، أكثر منطقية من إهمال الإشارات السالبة لهذه الفروق في الانحراف المتوسط. بعد إجراء عملية التربيع السابقة لهذه الفروق نقوم بقسمة مجموع مربعات هذه الفروق على عددها، ينتج لنا مقياس

* –إجراء عملية التربيع لأي قيمة سالبة تحولها إلى قيمة موجبة، وهكذا تكون جميع الفروق السالبة بعد إجراء عملية التربيع موجبة.

يطلق عليه التباين (ويرمز له بالرمز ع^2 إذا كان التوزيع لعينة، σ^2 إذا كان التوزيع لمجتمع إحصائي) أي أن التباين عبارة عن متوسط مجموع مربع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي أي أن:

ع^2 أو σ^2=(مجـ (س – سَ)^2)/ن   (لبيانات كمية غير مبوبة)

أو ع^2 أو σ^2= (مجـ (س – سَ)^2 ك)/ مجـ ك   (لبيانات كمية مبوبة)

لكن بأخذ الجذر التربيعي للتباين ينتج لنا الانحراف المعياري (ويكون تمييزه بوحدة قياس من نفس نوعية وحدة قياس البيانات الأصلية للظاهرة موضوع الدراسة).

وعليه فإنه يمكن تعريف الانحراف المعياري (ع أو σ) بأنه: الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي، أي أن

ع=$\sqrt{ع^2}$ (لمفردات عينة إحصائية)

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (لمفردات مجتمع إحصائي).

2-4-1 الانحراف المعياري لبيانات غير مبوبة:

1-حساب الوسط الحسابي (سَ) لمجموع القيم.

2-حساب انحراف القيم المختلفة عن وسطها الحسابي (س–سَ) أي ح

3-تربيع الانحرافات السابقة (س–سَ)^2 أو ح^{2}ثم إيجاد مجموعها، أي مجـ (س – سَ)^2، وبقسمتها على (ن) أي عدد مفردات القيم ينتج لنا متوسط مجموع مربعات الفروق.

4-بأخذ الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات الفروق، ينتج لنا الانحراف المعياري المطلوب.

مثال: حساب الانحراف المعياري:

أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية:

25	20	10	8	10	7	4	4	2

الحل:

الطريقة الأولى:

س̄ = (مجـ س)/ن = 8/80 = 10

القيم (س): 2 ، 4، 4 ، 7 ، 8 ، 10، 10، 10، 20 ، 25

الوسط الحسابي (س̄): 10

2-الانحراف (ح): -8 ، -6 ، -6، -3 ، -2 ، 0، 0، 10 ، 15 (س – س̄)

3-مجـ (س – س̄)^2: 64+36+36+9+4+0+0+100+225= 474.

4- ع^2= (مجـ (س–س̄)^2)/ن = 8/474 = 59,25

5- ع = $\sqrt{ع^2}$

أو ع = $\sqrt{(مجـ\ (س – س̄)^2)/ن}$

= $\sqrt{8/\ 474}$ = 59,25 =7,7

الطريقة الثانية:

ع^2 = [(مجـ س^2)/ن] – [(مجـ س)/ ن)]^2

ع = $\sqrt{[(مجـ\ س^2)/ن]-[(مجـ\ س)/\ ن)]^2}$

2-4-2 الانحراف المعياري لبيانات مبوبة (توزيعات تكرارية):

مثال: الانحراف المعياري لبيانات مبوبة (توزيعات تكرارية):

أوجد الانحراف المعياري للتوزيع التكراري التالي:

فئة الطول (ف)	**131-125**	**137-131**	**143-137**	**149-143**	**155-149**	**المجموع**
عدد التلاميذ (ك)	6	11	15	12	6	**50**

الحل:

ف	**ك**	**مركز الفئةس**	**س ك**	**ح: (س-س)**	**ح^2:(س- س)^2**	**(س-س)^2 ك**
131-125	6	128	768	-12,12	146,894	881,364
137-131	11	134	1474	-6,12	37,454	411,994
143-137	15	140	2100	-0,12	014'0	0,210
149-143	12	146	1752	5,88	34,574	414,888
155-149	6	152	912	11,88	141,134	846,804
المجموع	50		7006	0,60		2555,26

1-س = (مجـ س ك)/ مجـ ك = 50/7006 = 140,12 سم

2- ع^2 = (مجـ (س-س)^2 ك)/مجـ ك = 50/2555,26 = 51,11 سم

3- ع = $\sqrt{ع^2}$.

= 51,11 = 7,148 سم

الطريقة الثانية: أسلوب الوسط الفرضي:

من المفضل لتسهيل العمليات الحسابية استخدام وسط الفرضي بدلا من استخدام الوسط الحسابي الحقيقي.

خطوات حساب الانحراف المعياري حسب الوسط الفرضي:

- حساب مراكز الفئات (س) في التوزيع التكراري.
- اختيار أحد مراكز الفئات كوسط فرضي (أ) ويفضل المركز الذي يقع أمام أكبر تكرار.
- حساب الفرق بين مركز كل فئة (س) والوسط الفرضي المختار (أ) أي (س-أ) وسنرمز له بالرمز (ح).
- بضرب الانحراف (ح) لكل فئة في تكرار نفس الفئة نحصل على (ح ك) وبجمع عناصر العمود (ح ك) نحصل على (مجـ ح ك).
- بضرب (ح ك) لكل فئة في الانحراف لنفس الفئة (ح) نحصل على (ح^2 ك) وبجمع عناصر العمود (ح^{2}ك) نحصل على مجـ (ح^{2}ك).
- نطبق الصيغة التالية للحصول على الانحراف المعياري بأسلوب الوسط الفرضي

$$ع = \sqrt{\left[(\text{مجـ ح}^2\text{ك}) / (\text{مجـ ك})\right] - \left[(\text{ مجـ ح ك})^2 / ((\text{ مجـ ك})^2)\right]}$$

<u>مثال</u>: الانحراف المعياري:

أوجد الانحراف المعياري في المثال السابق بأسلوب الوسط

ف	ك	س	(س-أ)	ح ك	ح^2 ك
131-125	6	128	12-	72-	849
137-131	11	137	6-	66-	396
143-137	15	140	0	0	0
149-143	2	146	6	72	432
155-149	6	152	12	72	864
المجموع	**50**	**أ =140**	**6**	**6**	**2556**

ع= $\sqrt{[(2556/50)] - [(6)^2/(50)^2]}$

= $\sqrt{51{,}12-0{,}014}$ = $\sqrt{51{,}106}$

=7,15 سم   (وهي نفس النتيجة بالأسلوب المباشر)

2-5 خصائص الانحراف المعياري:

1-لا يتأثر الانحراف المعياري-وباقي مقاييس التشتت- لتوزيع معين بالعمليات الجبرية الناتجة عن عمليات الجمع والطرح بعكس مقاييس النزعة المركزية.

2-يأخذ في الاعتبار عند قياسه جميع مفردات التوزيع ولكنه يعطي وزنا للمفردات المتطرفة بعكس نصف المدى الربيعي، من هنا كان من الأفضل استخدام نصف المدى الربيعي كمقياس في حالة التوزيعات شديدة الالتواء.

3-نظرا لأنه يتأثر بالوسط الحسابي لمجموعة مفردات الدراسة، لذا لا يمكن استخدامه لمقارنة توزيعين من نفس النوعية لكن وسطها الحسابي مختلف ولنفس السبب لا يستخدم في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

3- مقاييس التشتت النسبي:

3-1 معامل الاختلاف المعياري:

ويعرف على أنه «الانحراف المعياري معبرا عنه كنسبة مئوية من الوسط الحسابي»، وبالطبع كلما كبر معامل الاختلاف كلما دل ذلك على قوة التشتت بين مفردات توزيع الظاهرة، في حين كلما صغر معامل الاختلاف كلما دل ذلك على ضعف التشتت بين مفردات توزيع الظاهرة.

معامل الاختلاف المعياري [وسنرمز له بالرمز (م ع)]

م ع= (الانحراف المعياري/ الوسط الحسابي) × 100

أي (م ع) = (ع/$\bar{س}$) ×100

مثال: معامل الاختلاف المعياري

قارن بين التشتت في كل من التوزيعين التكراريين التاليين:

أولا:

فئة الأجر	15-5	25-15	35-25	45-35	55-45	65-55	75-65	المجموع
عدد العمال	5	7	10	14	8	4	2	50

ثانيا:

درجات النجاح	20-0	40-20	60-40	80-60	100-80	المجموع
عدد الطلبة	15	9	7	17	2	50

نظرا لاختلاف وحدات القياس في الظاهرتين، وحتى يمكن المقارنة بين التوزيعين لا بد من استخدام معامل الاختلاف المعياري كما يلي:

التوزيع التكراري للظاهرة الأولى:

ف	ك	س	ح	ح ك	$ح^2$ ك
15-5	5	10	30-	150-	4500
25-15	7	20	20-	140-	2800
35-25	10	30	10-	100-	1000
45-35	14	40	0	0	0
55-45	8	50	10	80	800
65-55	4	60	20	80	1600
75-65	2	70	30	60	1800
المجموع	**50**	**أ = 40**		**170 -**	**12500**

الوسط الفرضي (أ) = 40

$\overline{س}$ = أ + [(مجـ ح ك)/ (مجـ ك)]

= 40 + (-170/50) = 40- 3.4 = 36.6 دينار.

ع = $\sqrt{\text{[(مج } ح^2 \text{ ك/مج ك)] – [(مج ح ك)}^2\text{/ (مج ك)}^2\text{]}}$

$= \sqrt{(^2(50/170-)) - (50/12500)}$

$= \sqrt{11,56 - 250 = \;^2(3,4-) - 250}$

$= \sqrt{238,44}$ = 15,44 دينارا

معامل الاختلاف (م ع) = (ع/ س)× 100

= (36,6/15,44) × 100 = 42.2 %

التوزيع التكراري للظاهرة الثانية:

ف	ك	س	ح	ح ك	ح^2 ك
20-0	15	10	60-	900-	54
40-20	9	30	40-	360-	14400
60-40	7	50	20-	140-	2800
80-60	17	70	0	0	0
100-80	2	90	20	40	800
المجموع	50	أ=70		1360-	72000

الوسط الفرضي (أ) = 40

س = أ + (مج ح ك/مج ك)

= 70 + (50/-1360) = 70-72.2 = 42.8 درجة.

ع = $\sqrt{[(\text{مج ح}^2\text{ك})/\text{مج ك}] - [(\text{مج ح ك})^2/(\text{مج ك})^2]}$

$= \sqrt{[^2(50/-1360) - (50/72000)]}$

$= \sqrt{739,84 - 1440} = \sqrt{700,16}$ = 26,46 درجة

$= \sqrt{238,44}$ = 15,44 درجة

معامل الاختلاف (م ع) لدرجة النجاح

$= (42,8/26,46) \times 100$

$= \overline{(\text{ع}/\text{س})} \times 100 = 61,8$ %

وعليه فإن الظاهرة الثانية –درجات النجاح– أكثر تشتتا من الظاهرة الأولى –الأجر بالدينار– وذلك لأن معامل الاختلاف في الأولى (42.2 %) أكبر من معامل الاختلاف للظاهرة الثانية (61,8 %).

3-2 المدى النسبي:

(أكبر قيمة –أقل قيمة/الوسط الحسابي) × 100

ثانيا: التوزيع الطبيعي

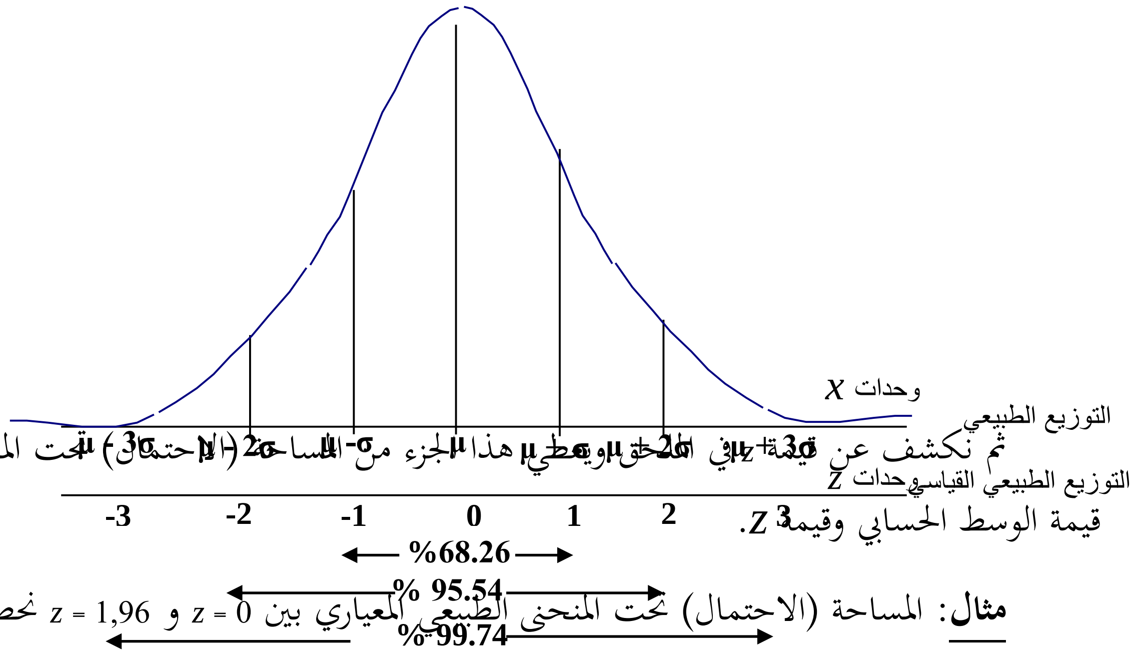
المتغير العشوائي المتصل x هو المتغير الذي يمكن أن يأخذ عدداً لا نهائياً من القيم داخل أي فترة معلومة. احتمال أن يقع x داخل أي فترة تمثله مساحة التوزيع الاحتمالي (ويسمى أيضاً دالة الكثافة) داخل هذه الفترة والمساحة الكلية تحت المنحنى (الاحتمال) تساوي 1.

1– تعريف التوزيع الطبيعي: هو توزيع احتمالي متصل وهو أكثر التوزيعات استخداماً في التحليل الإحصائي، والتوزيع الطبيعي جرسي الشكل ومتماثل حول الوسط الحسابي ويمتد إلى ما لا نهاية في الاتجاهين، ولكن معظم المساحة (الاحتمال) تتركز حول الوسط الحسابي (أنظر الشكل).

2– تعريف التوزيع الطبيعي القياسي: هو توزيع طبيعي وسطه الحسابي 0 وانحرافه المعياري 1 (أي أن $\mu = 0$ و$\sigma = 1$) ويمكن تحويل أي توزيع طبيعي (بوحدات x في الشكل 1) إلى توزيع طبيعي قياسي (بوحدات z) وتحت هذه الشروط، فإن 68.26 % من المساحة (الاحتمال) تحت المنحنى الطبيعي القياسي تقع بين احداثيين رأسيين يبعدان بمقدار انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي (أي داخل $\mu \pm 1\sigma$)، 95.54 % تقع بين $\mu \pm 2\sigma$، 99.74 % تقع بين $\mu \pm 3\sigma$.

ولإيجاد الاحتمالات (المساحات) في مسائل تحتوي على التوزيع الطبيعي، فإننا نحول أولاً قيم

x إلى قيم z المناظرة لها، كالآتي: $z = (\sigma / x - \mu)$



ثم نكشف عن قيمة z في الملحق والتي تعطي هذا الجزء من المساحة (الاحتمال) تحت المنحنى بين قيمة الوسط الحسابي وقيمة Z.

مثال: المساحة (الاحتمال) تحت المنحنى الطبيعي المعياري بين $z = 0$ و $z = 1,96$ نحصل عليها مقابلة للقيمة 1,96 في الملحق، ففي عمود Z نبدأ بالقيمة 1,9 ونتحرك في الصف المناظر لها حتى نصل إلى العمود المعنون 0,06، وتكون القيمة التي نحصل عليها 0,4750 ويعني هذا أن 47,50 % من المساحة الكلية (1 أو 100 %) تحت المنحنى تقع بين $z = 0$ و $z = 1,96$ (المساحة المظللة في الشكل فوق الجدول) ولأن التوزيع متماثل، فإن المساحة بين $z = 0$ و $z = -1,96$ (ليست مدرجة في الجدول) هي أيضا 0,4750 أو 47,50 % .

مثال: افترض أن x متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي حيث $\mu = 10$ و $\sigma^2 = 4$ ونريد إيجاد احتمال أن تأخذ x قيمة بين 8 و12 نحسب أولاً قيمة z المناظرة لقيم x ، ثم نكشف عن القيم التي تناظر قيم z في الملحق :

$$z_1 = \sigma/(x_1 - \mu) = 2/(8-10) = -1 \quad \text{و} \quad z_2 = \sigma/(x_2 - \mu) = 2/(12-10) = +1$$

عندما $z = 1$ نحصل على القيمة 0,3413 من الملحق ومن ثم فإن المساحة بين $z = \pm 1$ تساوي 2(0.3413) أو 0,6826 وهذا يعني أن احتمال أن تأخذ x قيمة بين 8 و12 أو $p(8 < x < 12)$ هو 68,26 % (انظر الشكل 1).

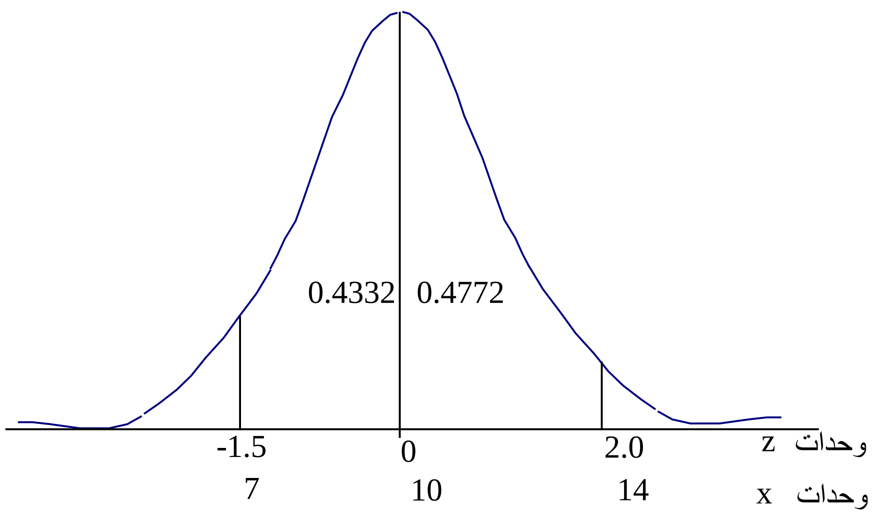
مثال: افترض مرة أخرى أن x متغير عشوائي موزع طبقاً للتوزيع الطبيعي حيث $\mu=10$، و$\sigma^2 = 4$ فيمكن إيجاد احتمال أن تأخذ x قيمة بين 7 و14 كالآتي:

$$z_1 = \sigma /(x_1 - \mu) = 2/(7-10) = -1,5 \quad \text{و} \quad z_2 = \sigma /(x_2 - \mu) = 2/(14-10) = 2$$

عندما $z_1 = 1,50$، نكشف عن القيمة 1,50 في الملحق فنحصل على 0,4332 وعندما $z_2 = 2$ نحصل على القيمة 0,4772 ومن ثم فإن:

$p = (7< x <14) = 0,4332 + 0,4772 = 0,9104$ أو %91,04.

(انظر الشكل 18) ومن ثم، فإن احتمال أن x تأخذ قيمة أقل من 7 أو أكبر من 14 (المناطق غير المظللة في أطراف التوزيع في الشكل) هي $0,0896 = 0,91404$ .1 أي %8,96 ويستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع ذي الحدين عندما $n \geq 30$ و$np > 5$، $n(1-p) > 5$، كما يستخدم كتقريب لتوزيع بواسون عندما $\lambda \geq 10$.



ثالثا: الانحدار والارتباط

1-تعريف الانحدار:

الانحدار يعني تأثر متغير أو ظاهرة معينة بمتغير أو ظاهرة أخرى وهذا يتطلب تحديد قيم متغيرين

أو أكثر عن كل عنصر من عناصر العينة المأخوذة من مجتمع البحث ومن ثم إتباع أساليب إحصائية يمكن من خلالها تحديد العلاقة بين المتغيرات. ويطلق على هذه العلاقة الكمية بين المتغيرين بالانحدار وأن الأسلوب الإحصائي الذي يحدد العلاقة يسمى بتحليل الانحدار وعلى هذا فإن الانحدار يشمل على متغيرين أحدهما متغير تابع والآخر متغير مستقل (واحد أو أكثر) فالمتغير التابع هو المتغير الذي يتأثر بمتغير واحد أو أكثر والمتغير المستقل هو المتغير الذي يؤثر في متغير آخر ولا يتأثر به وعليه فإن التحصيل الدراسي يعتبر متغيراً تابعاً وأن الذكاء يعتبر متغيراً مستقلاً وذلك لأنه يؤثر ويترك أثراً في التحصيل الدراسي للطلبة ونرمز عادة للمتغير المستقل بالحرف (س) والمتغير التابع بالحرف (ص). والانحدار يكون على نوعين: البسيط والمتعدد .وسنتناول النوع الأول فقط.

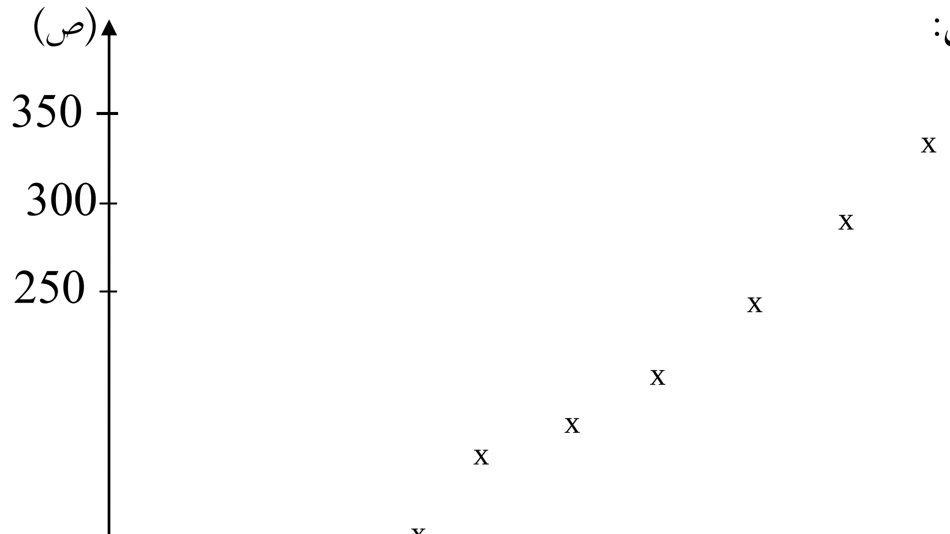
1-1- الانحدار البسيط

يعرف الانحدار البسيط بأنه علاقة دالية تربط بين متغيرين أحدهما المتغير التابع (المعتمد) والآخر المتغير المستقل، ويمكن أن نميز نوعين من أنواع الانحدار البسيط هما الانحدار الخطي المستقيم والانحدار المنحني (غير المستقيم).

والانحدار الخطي المستقيم يمثل أبسط علاقات الانحدار ويعبر عنه بعلاقة دالية خطية عند تحديد أزواج القيم التي تمثل متغيراتها محورين متعامدين بشكل نقاط والتي يطلق عليها بشكل الانتشار. أما الانحدار المنحني (غير المستقيم) وهو ذلك النوع من الانحدار الذي تكون فيه العلاقة بين المتغيرين ممثلة بخط منحني وتسمى هذه العلاقة بالعلاقة غير المستقيمة أو المنحنية.

عندما يراد تحديد العلاقة الكمية (الانحدار) بين المتغير التابع والمتغير المستقل يبدأ الباحث بتحديد عينة من الأفراد أو العناصر لإمكانية الحصول على عدد أزواج البيانات وكل زوج منها يمثل قيمة (س): المتغير المستقل وقيمة (ص): المتغير التابع المناظرة لها.

أ- الانحدار الخطي:



200 –

150 –

100 –

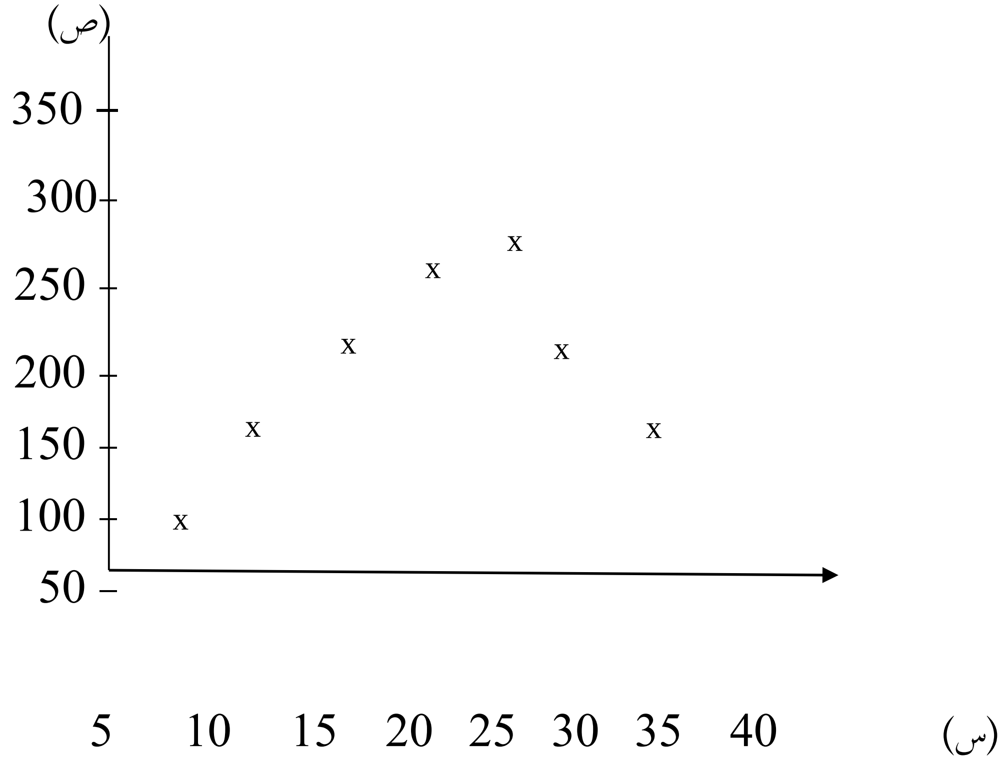
50 –

15 20 25 30 35 40 45 50 55 (س)

الشكل يوضح الانحدار الخطي المستقيم

لو بحثنا الاتجاه العام الذي تبينه نقاط التقاء قيم (س) وقيم (ص) نلاحظ وجود علاقة واضحة بين قيم هذين المتغيرين (س،ص) حيث أنه كلما زادت قيمة (س) كلما زادت بالمقابل قيمة (ص) المناظرة لها، ولهذا يبدو واضحاً أن اتجاه هذه العلاقة يأخذ شكل الخط المستقيم ولذلك تسمى بالانحدار الخطي.

ب– علاقة الدرجة الثانية:



الشكل يبين علاقة من الدرجة الثانية بين المتغيرين

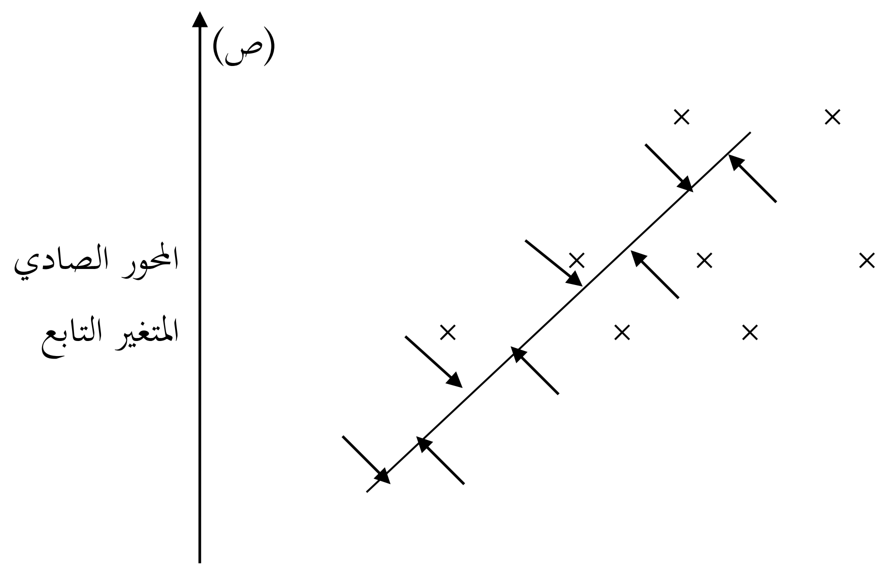
عند البحث في الاتجاه العام الذي تبينه نقاط التقاء قيم المتغير (س) وقيم المتغير (ص) نلاحظ أن العلاقة واضحة أي كلما ازدادت قيم (س) كلما ازدادت قيم (ص)، يحصل هذا في بداية المرحلة ثم تتضاءل الزيادة في المتغير (ص) ومن ثم تبدأ القيم بالتناقص عند تجاوز قيمة المتغير (س) مستواها البالغ (30) هذه العلاقة تسمى علاقة من الدرجة الثانية ومن أبسط الأمثلة على ذلك تأثير كمية السكر المضافة إلى قدح الشاي في حالة استخدام مقادير عالية ومنخفضة.

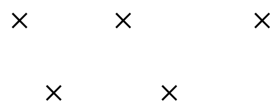
ج-حساب الانحدار الخطي البسيط:

إن دراسة الانحدار وكما أشرنا سابقاً تهدف بشكل أساسي إلى تحديد العلاقة بين المتغيرين بطريقة رياضية وذلك للاستفادة منها في عملية التنبؤ والذي يعني معرفة قيم متغيرات تابعة في ضوء معرفة قيم المتغيرات المستقلة. كلما كانت هذه العلاقة قوية بين المتغيرين كلما كان تقدير قيم أحد المتغيرين ممكناً .

د-معادلة الانحدار الخطي البسيط:

إن التعامل مع الانحدار الخطي البسيط يستند أساساً على فكرة معادلة الخط المستقيم التي تمثل بيانياً بخط مستقيم في شكل الانتشار، كما في الشكل الآتي:





(س) المحور السيني (المتغير المستقل)

حيث يمثل (س) المتغير المستقل و (ص) المتغير التابع والعلاقة بينهما علاقة خطية وتمثل قيم (س) و (ص) قيم المتغيرين اللذين يمكن التنبؤ بأحدهما من الآخر، وعليه من أجل الحصول على أفضل خط انحدار (مستقيم) يجب أن لا يترك الأمر لاعتبارات شخصية في تقديره وإنما يتم بأسلوب رياضي يعتمد على استخدام طريقة المربعات الصغرى التي تجعل مجموع مربعات انحرافات القيم عن خط الانحدار أقل ما يمكن، أو أن مجموع انحرافات القيم عن خط الانحدار تساوي صفر.

وبناء على ذلك فقد تم اعتماد معادلة رياضية من الدرجة الأولى سميت بمعادلة خط الانحدار:

^ص = أ س + ب

حيث أن:

س: تمثل المتغير المستقل الذي يكون بمتناول الباحث وتتوفر عنه بيانات كمية تستخدم للتنبؤ بقيم المتغير (ص).

^ص: تمثل المتغير التابع وتشير الإشارة التي وضعت في أعلاه (^) للدلالة على القيمة المقدرة على خط الانحدار.

أ: معامل الانحدار ويعني هندسياً ميل خط الانحدار على المحور الأفقي (السيني) ورياضياً المشتقة التفاضلية لـ (س) بالنسبة لـ (ص) وقيمة (أ) تعني مقدار التغير بالمتغير التابع (ص) نتيجة للتغير في المتغير المستقل (س) بوحدة واحدة.

ب: ثابت الانحدار ويعني هندسياً بأنه ذلك الجزء المقطوع من المحور العمودي (ص)، ويمثل نقطة التقاطع مع المحور العمودي عندما تكون قيمة المتغير (س) مساوية للصفر.

أولا: مفهوم الارتباط:

يشير مفهوم الارتباط إلى قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين، فقد تكون قوة هذه العلاقة بعدة مستويات (معدومة، ضعيفة، متوسطة، عالية، تامة) وأيضاً فإن العلاقة قد يكون اتجاهها موجبا (طردياً) أو سالباً (عكسياً) .

وتقاس قيمة الارتباط بمعامل يسمى معامل الارتباط الذي تتراوح قيمته بين (+1، -1) وكلما قربت قيمة معامل الارتباط من الواحد الصحيح كلما كان الارتباط قوياً، وإذا كانت قيمته تساوي الواحد الصحيح سواء كان موجباً أو سالباً فإن الارتباط يكون تاماً بين المتغيرين، أما إذا اقتربت قيمته من الصفر فإن الارتباط ضعيفاًً، وإذا كانت قيمته مساوية للصفر فإن الارتباط يكون معدوماً بين المتغيرين والجدول التالي يبين مدى قوة معامل الارتباط بدلالة القيم الرقمية التي يشير إليها:

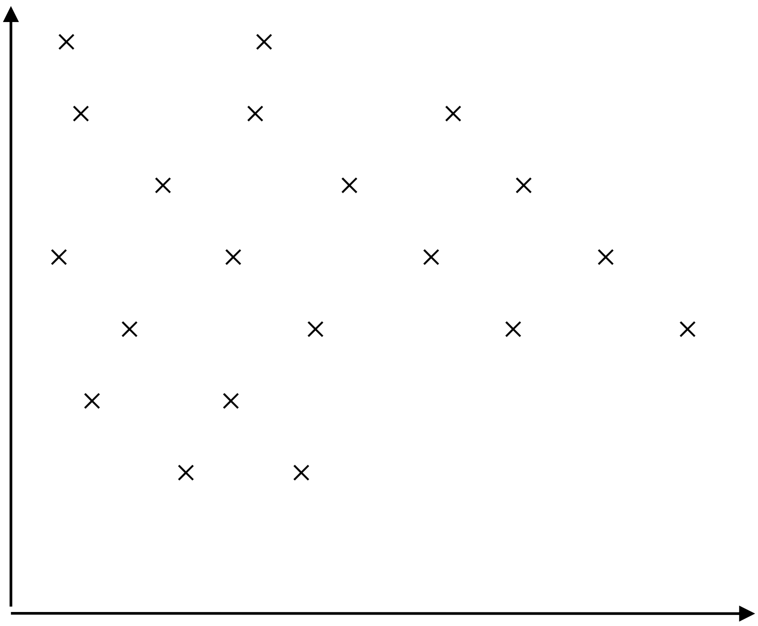
جدول يبين مدى قوة معامل الارتباط بدلالة القيم الرقمية

قوة معامل الارتباط	مدى معامل الارتباط
لا توجد علاقة (معدومة)	صفر
ضعيفة جدا	0,19 - 0,01
ضعيفة	0,39 - 0,20
متوسطة	0,59 – 0,40
عالية	0,79 – 0,60
عالية جدا	0,99 – 0,80
تامة	+ 1 أو – 1

إن إشارة الارتباط سواء كانت موجبة أو سالبة فإنها لا تحدد قوة العلاقة الإرتباطية ولكن تظهر الاتجاه للعلاقة فقط فإذا كانت العلاقة الإرتباطية بين متغيرين (+0,70) فإن قوة الارتباط هذه تساوي تماماً قوة معامل الارتباط (-0,70) إضافة إلى التعبير الكمي في تحديد قوة العلاقة الإرتباطية بين متغيرين يمكن تحديدها بأسلوب آخر وذلك من خلال تفحص أشكال الانتشار لقيم المتغيرين التي تكون على عدة أنواع منها:

- علاقة ارتباطية ضعيفة بين المتغيرين وتكون قريبة من الصفر عندما تكون نقاط العلاقة بين قيم المتغيرين في شكل الانتشار غير منتظمة ومبعثرة بشكل متباعد كما في الشكل التالي:

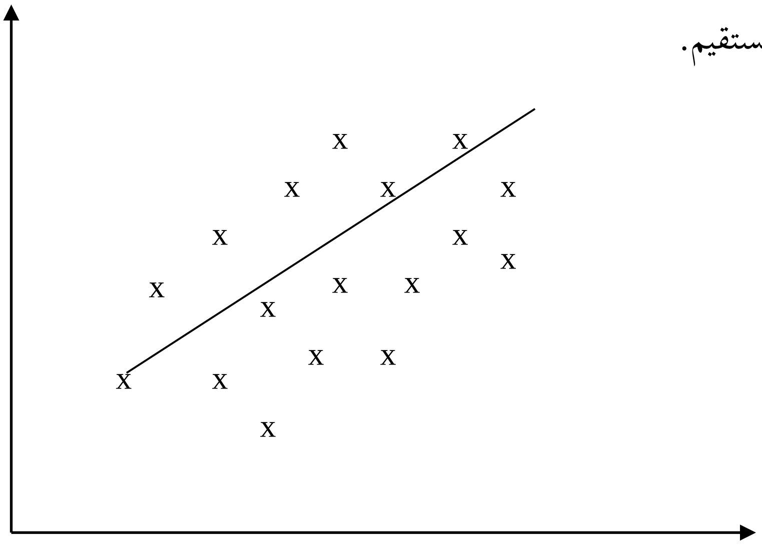
المتغير (ص)



المتغير (س)

الشكل علاقة إرتباطية ضعيفة وقريبة من الصفر

- علاقة إرتباطية قوية نوعا ما بين المتغيرين عندما تكون نقاط العلاقة بين القيم المتغيرين في شكل الانتشار قريبة من بعضهما وتؤخذ شكل الخط المستقيم ويطلق على العلاقة هذه بالارتباط الخطي أو المستقيم.

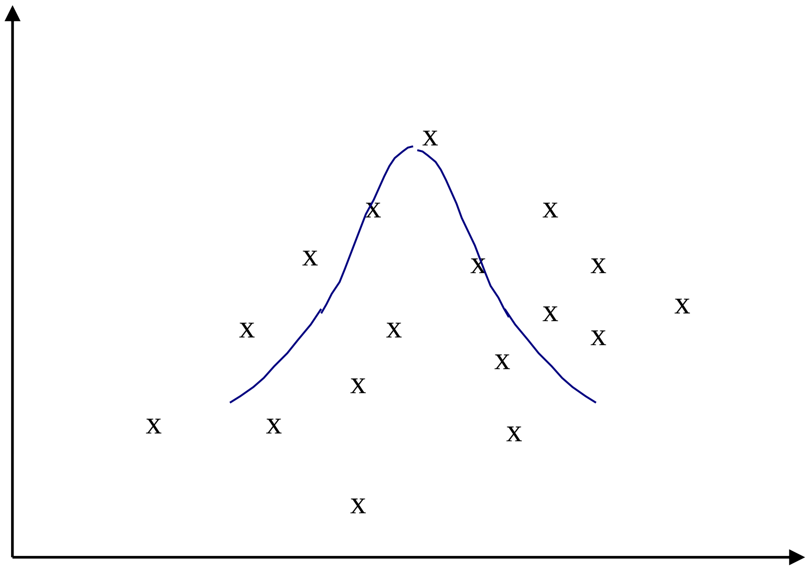


(س) **الشكل علاقة ارتباطية خطية وقوية**

- علاقة انحنائية غير خطية عندما يأخذ اتجاه نقاط العلاقة بين قيم المتغيرين في شكل انتشار خطأ

منحياً فيكون الارتباط بين المتغيرين انحنائي غير مستقيم.

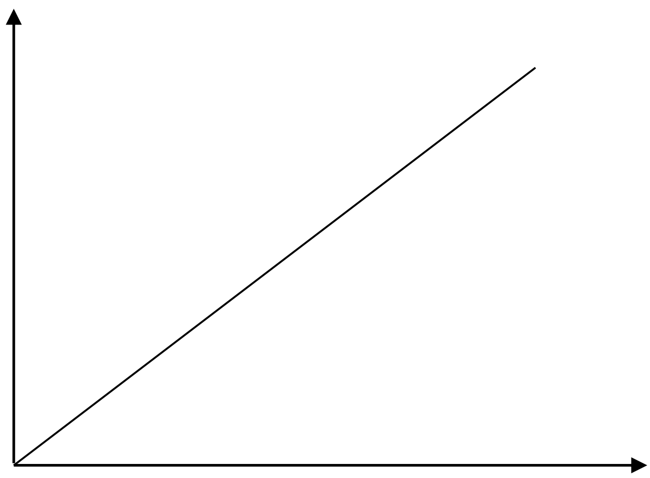
المتغير(ص)



المتغير (س) **الشكل علاقة ارتباطية خطية وقوية**

– علاقة تامة موجبة عندما يكون اتجاه نقاط العلاقة بين قيم المتغيرين في شكل الانتشار على خط مستقيم وباتجاه طردي.

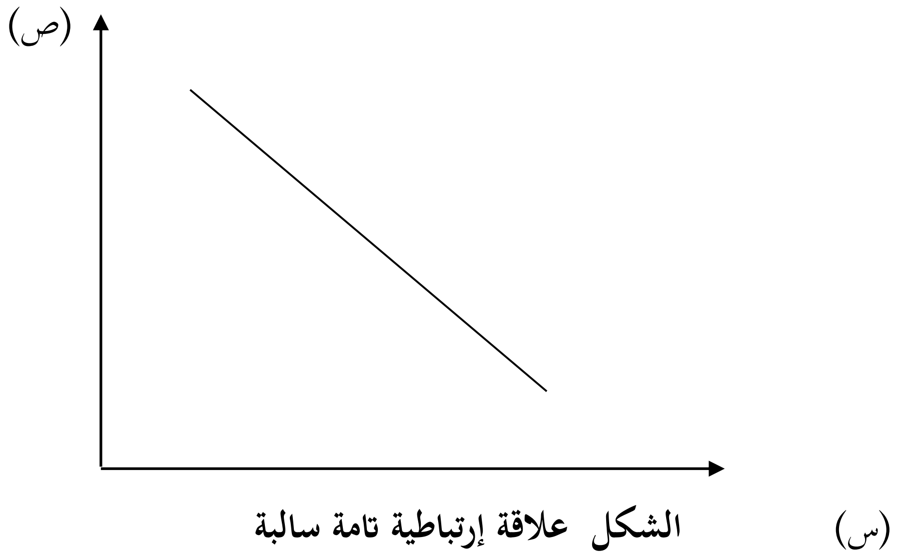
المتغير (ص)



المتغير (س)

الشكل علاقة إرتباطية تامة موجبة

–علاقة تامة سالبة عندما يكون اتجاه نقاط العلاقة بين قيم المتغيرين في شكل الانتشار خط مستقيم وباتجاه عكسي.



الشكل علاقة إرتباطية تامة سالبة

وفي تناولنا لدراسة الارتباط فإننا نفترض بأن العلاقة بين المتغيرين علاقة خطية وإن الارتباط بينهما هو ارتباط خطي.

5– أنواع معامل الارتباط:

يقسم مقياس معامل الارتباط إلى عدة أنواع من حيث عدد المتغيرات ونوع القيم التي يتضمنها إذا كانت عددية (كمية) أو مرتبة (نوعية) وهذه الأنواع هي:

معامل الارتباط الخطي البسيط:

يقيس الارتباط بين متغيرين اثنين ذات قيم عددية.

معامل الارتباط الخطي المتعدد:

يقيس الارتباط عندما يكون عدد المتغيرات أكثر من اثنين وذات قيم عددية.

معامل الارتباط الجزئي:

يقيس العلاقة بين اثنين فقط من بين عدة متغيرات على فرض أن تأثير بقية المتغيرات الأخرى يبقى ثابتاً.

معامل الارتباط للرتب:

يقيس الارتباط بين متغيرين ليس باستخدام قيمها الأصلية وإنما بين رتب هذه القيم وفيما يلي

عرضاً تفصيلياً لمعامل الارتباط الخطي البسيط وكيفية حسابه.

6- الارتباط الخطي البسيط:

يهتم الارتباط البسيط بدراسة العلاقة بين متغيرين اثنين فقط بهدف وصفها من حيث أهميتها واتجاهها، فقد يرغب الباحث معرفة مدى تجاوب قيم المتغير (س) لقيم المتغير (ص) ومن ثم استخلاص الدلائل التي تحدد أهمية التلازم والعلاقة بين المتغيرين. وإن وصف العلاقة بين المتغيرين لابد له أن يشمل درجة أو أهمية العلاقة واتجاهها.

6-1 طرق حساب معامل الارتباط الخطي البسيط:

هناك طرقاً متعددة لحساب معامل الارتباط الخطي البسيط وتزيد في عددها عن عشرين طريقة وتعد طريقة حساب معامل الارتباط بطريقة العزوم التي تنسب لبيرسون (Pearson) من أفضل الطرق في قياس العلاقة الإرتباطية بين متغيرين .

يعتمد استخراج معامل الارتباط البسيط بهذه الطريقة على حساب انحرافات القيم عن وسائطها الحسابية لكل من المتغيرين (س وص) ثم إيجاد مربعات تلك الانحرافات وتطبق المعادلة الآتية:

$$\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ر}}-\bar{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ر}}-\bar{\text{ص}})}{\sqrt{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ر}}-\text{س})^2(\text{ص}_{\text{ر}}-\text{ص})^2}}$$

مثال:

البيانات في الجدول التالي تمثل علامات (6) طلاب في مرحلة الثالثة ابتدائي في اختبارين (الرياضيات واللغة العربية) والمطلوب حساب معامل الارتباط الخطي البسيط بين علامات الطلاب في الاختبارين باستخدام طريقة الانحرافات عن الأوساط الحسابية.

الاختبار	العلامات					
الرياضيات	6	7	5	9	5	10

اللغة العربية	5	4	7	8	8	10

الحل:

1- نرمز لعلامات الطلاب في اختبار الرياضيات بالرمز (س) وعلامات الطلاب في اختبار اللغة العربية بالرمز (ص).

2- نستخرج الوسط الحسابي لعلامات الطلبة في اختبار الرياضيات (س) والوسط الحسابي لعلامات الطلبة في اختبار اللغة العربية (ص) وذلك وفقاً للمعادلة الآتية:

وعليه فإن:

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$$

$$\bar{\text{س}} = 6/42$$

إذن س = 7 الوسط الحسابي لعلامات الطلبة في اختبار الرياضيات.

$\bar{\text{ص}} = 6/42$

$\bar{\text{ص}} = 7$ الوسط الحسابي لعلامات الطلبة في اختبار اللغة العربية.

3- نرسم جدولاً يتضمن سبعة أعمدة تمثل (س ر)، (ص ر)، (س ر−س̄ ر)، (ص ر−ص̄)، (س ر−س̄)²، (ص ر−ص̄)²، (س ر−س̄) × (ص ر− ص̄)، وفقا للبيانات التي تتطلبها معادلة الارتباط كالآتي:

س ر	ص ر	(س ر − س̄)	(ص ر − ص̄)	(س ر − س̄)²	(ص ر − ص̄)²	(س ر − س̄)(ص ر − ص̄)
6	5	1-	2-	1	4	2
7	4	0	3-	0	9	0
5	7	2-	0	4	0	0
9	8	2	1	4	1	2

-2	1	4	1	-2	8	5
9	9	9	3	3	10	10
$\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر-\bar{س})(ص_ر-\bar{ص})=11$	$\sum_{ر=1}^{ن}(ص_ر-\bar{ص})^2=24$	$\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر-\bar{س})^2=22$	$\sum_{ر=1}^{ن}(ص_ر-\bar{ص})=0$	$\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر-\bar{س})=0$	$\sum_{ر=1}^{ن}ص_ر=51$	$\sum_{ر=1}^{ن}س_ر=42$

4- بالتعويض في المعادلة التالية يمكن استخراج معامل الارتباط:

$$ر_{س ص} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2 (ص_ر - \bar{ص})^2}}$$

$$ر_{س ص} = \frac{11}{\sqrt{24 \times 22}}$$

إذن $ر_{س ص} = 0,479$

أنواع معاملات الارتباط

1- معامل ارتباط كارل بيرسون :

نفرض أنه لدينا متغيرين المتغير الأول مستقل س والمتغير الثاني تابع ع ولدينا ن من الأزواج القيم (س، ع) حيث أن قيم س = س 1، س 2، س 3 ... س $_ن$ قيم ع هي : ع 1، ع2، ع3 ... ع $_ن$ وهما متغيرين كميين معا.

فالعلاقة بين المتغيرين س، ع ستتوقف على قيم كل من المتغيرين ولذلك فلابد أن نستخدم هذه القيم لقياس علاقة الارتباط بينهما.

والارتباط يقيس العلاقة بين التغير في قيم س والتغير في قيم ع ولذلك فلابد لنا من إيجاد التغير في قيم كل من س، ع وأفضل طريقة لقياس هذا التغير هي إيجاد الفرق بين قيم كل متغير ووسطه في هذه الحالة.

ومعامل ارتباط كارل بيرسون يسد نقصا كبيرا في حالة استعمالنا لمعامل سبرمان عند وجود متغيرين كميين قابلين للقياس لكن في جداول غير مبوبة.

حيث يهتم هذا الأخير بالرتب وليس بالقيم نفسها، وحساب الارتباط بالرتب تقل دقته من حسابه على أساس القيم فزيادة القيم أو نقصها لا تتغير من قيمة المعامل على أساس الرتب مادامت هذه الزيادة أو النقصان لا تغير وضع القيمة بالنسبة لمجموعة بينما يتأثر معامل الارتباط بيرسون بأي تغير في أي قيم من قيم المتغيرين

ا– معامل كارل بيرسون في حالة البيانات غير المبوبـة :

ويحسب وفق القانون التالي :

$$\text{ر} = \left[\frac{1}{\text{ن}}\right] \left[\frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ع} - \bar{\text{ع}})}{\text{ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ع}}}\right]$$

أحسب معامل كارل برسون للبيانات التاليـة :

	س	ع
	1	7
	3	19
	4	25
	7	43
	10	61
المجمـوع	**25**	**115**

س	ع	س – سَ	ع – عَ	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$	$(\text{ع} - \bar{\text{ع}})^2$	(س – سَ)(ع – عَ)

1	7	-4	-24	16	576	96
3	19	-2	-12	4	144	24
4	25	-1	-6	1	36	6
7	43	2	12	4	144	24
10	61	5	30	25	900	150
25	**155**			**50**	**1800**	**300**

$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{25}{} = 5$

$\bar{ع} = \frac{\sum ع}{ن} = \frac{15}{} = 31$

$\sqrt{\frac{ح^2_س}{ن}} \quad \sqrt{\frac{50}{}}$

$ع_س = \sqrt{\frac{ح^2_ع}{ن}} \quad \sqrt{\frac{180}{}} = 3,16$

$ع_ع = \quad = \quad = 19,03$

بتعويض هذه المحاصيل في قانون ر نجد أن :

$ر = \frac{1}{ن} \cdot \frac{\sum |(س - \bar{س})(ع - \bar{ع})|}{ع_س \, ع_ع} \qquad ر = \frac{1}{5} \cdot \frac{300}{(19,03)(3,16)} = 0,99$

هذا يعني أن الارتباط قوي جدا وموجب/ طردي قريب من أن يكون كاملا بين المتغيرين.

ب)– في حالة البيانات المبوبـة :

إذا كان لدينا مجموعتين كبيرتين من قيم ظاهرتين أو متغيرين كميين معا يتجاوز تكرارها الكلي 50 وأردنا دراسة، الارتباط بين قيم المتغيرين فلابد من تبويب هذه البيانات في فئات ومن ثم أعداد جداول تكرارية مزدوجة من النوع المعروف ويحسب حينها معامل الارتباط بيرسون وفق العلاقة التالية.

$$\text{ر} = \frac{\sum \text{ك} (\text{س} - \text{و})(\text{ع} - \text{وَ}) - \text{ن}\ \text{ح}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{ع}}}{\text{ن}\ \text{ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ع}}}$$

مثال : لنفرض أننا نرغب في إجراء دراسة تحليلية للارتباط بين عمر العامل وأجره الأسبوعي معطى بالا وروا ولإجراء هذه الدراسة أخذنا عينة عشوائية تتكون من 90 عاملا وعاملة واعتبرنا العمر هو المتغير المستقل والأجر هو المتغير التابع وبعد أن حصلنا على البيانات التالية وهي قيم س، ع المبوبة في الجدول التالي والذي سوف نقوم بحساب معامل كارل برسون له.

ع / س	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	المجموع
20 – 30	3	3	1	–	–	7
30 – 40	–	4	6	5	–	15
40 – 50	–	1	15	5	9	30
50 – 60	–	4	6	8	2	20
60 – 70	2	4	10	2	–	18
المجموع	5	16	38	20	11	90

الحل :

1)– حساب ح س وع س :

فئات العمر	ك س	س س	ح س	ح س × ك	ح²س × ك
20 – 30	7	25	– 20	– 140	2800
30 – 40	15	35	– 10	– 150	1500
40 – 50	30	45	0	0	0
50 – 60	20	55	+ 10	200	2000
60 – 70	18	65	+ 20	360	7200
المجموع	90			270	13500

من الجدول نجد أن $ح_س = \frac{ح_س \times ك_س}{ك_س} = \frac{270}{90} = 3$

$$ع_س = \sqrt{\frac{\Sigma\, ح^2_س \times ك_س}{\Sigma\, ك_س} - (ح_س)^2} \qquad ع_س = \sqrt{\frac{13500}{90} - (3)^2} = 11,87$$

2)– حساب ح ع، و ع ع :

فئات الأجر	ك ع	سع	حع	ح ع × ك	ح²ع × ك
50 – 60	5	55	– 20	– 100	2000
60 – 70	16	65	– 10	– 160	1600
70 – 80	38	75	0	0	0
80 – 90	20	85	+ 10	200	4000
90 – 100	11	95	+ 20	220	4400
المجموع	90			160	12000

$\frac{ح_ع \times ك_ع}{ك_ع} \quad \frac{160}{90}$

$\sqrt{\frac{\Sigma\, ح^2_ع \times ك_ع}{\ldots}} \qquad \sqrt{\frac{12000}{\ldots}}$

من الجدول نجد كذلك أن ح ع =   =   = 1,78

ع ع =   – (ح ع)^2 =   – **(1,78)^2 = 11,41**

ثم بعد إيجاد قيم ح س، ح ع، ع س، ع ع يجري تنظيم جدول ارتباط على النحو التالي لإيجاد Σ ك (س – و) (ع – وَ).

	ح ع	**– 20**	**– 10**	**0**	**10**	**20**		
ح س	**ع** **س**	**–50** **60**	**–60** **70**	**–70** **80**	**–80** **90**	**– 90** **100**	**Σ ك** **س**	**مجموع حواصل الضرب**
20 -	– 20 30	3 1200	3 600	0 1	– –	–	7	1800
10 -	– 30 40	–	4 400	6 0	– 5 500	–	15	– 100
0	– 40 50	–	1 0	15 0	5 0	9 0	30	0
10	– 50 60	–	– 4 400	6 0	8 800	2 400	20	800
20	– 60 70	- 2 800	– 4 800	10 0	2 400	–	18	– 1200
		5	16	38 0	20 –	11	90	

	مجموع حواصل الضرب	**400**	**– 200**		**700**	**400**		**1300**

1200 هي حاصل ضرب تكرار الفئة × ح $_{س}$ × ح $_{ع}$ أي 3 × (– 20) (– 20) = 1200

والآن بمعلومة المحاصيل يمكن تطبيق القانون الخاص بمعامل كارل بيرسون

$$ر = \frac{\sum ك\,(س - و)(ع - \bar{و}) - ن\,ح_{س}\,ح_{ع}}{ن\,ع_{س}\,ع_{ع}} = \frac{1300 - 90\,(3)(1,78)}{90\,(11,41)(11,87)} = 0,067$$

هذا يعني وجود علاقة طردية ضعيفة بين المتغيرين س، ع أي أن سن العامل ليس هو المحدد لأجره، فقد تكون هناك أسباب أخرى أو عوامل أخرى كالأقدمية في المهنة والشهادة لمتحصل عليها ... إلخ.

2– معامل الائتلاف :

يوجد طريقة أخرى لقياس العلاقة بين ظاهرتين كميتين متغيرين كميين وذلك باستخدام معادلة وضعها بول هذه المعادلة تعطي لنا مقدار العلاقة بين المتغيرين وهذه المعادلة تسمى بمعامل الائتلاف ويرمز له بالرمز ل.

وتحسب وفق الصيغة التاليـة :

$$ل = \frac{\sqrt{أ\,د} - \sqrt{ج\,ب}}{\sqrt{أ\,د} + \sqrt{ج\,ب}}$$

حيث أن :

أ = عدد الحالات التي يكون فيها كل من المتغيرين المستقل والتابع فوق المتوسط الحسابي.

د = عدد الحالات التي يكون فيها كل من المتغيرين س ع تحت المتوسط الحسابي.

ج = عدد الحالات التي يكون فيها كل من قيم المتغير المستقل فوق المتوسط الحسابي وقيم عَ تحته.

ب = عدد الحالات التي يكون فيها كل قيم المتغير المستقل تحت المتوسط الحسابي وقيم المتغير التابع ع فوقه.

ولحساب هذا المعامل إذن نحتاج إلى حساب المتوسط الحسابي لكل من المتغير المستقل والتابع ثم نقوم بتحديد كل من أ، ب، ج، د وهذا ما سنلاحظه في المثال التالي.

مثال : الجدول التالي يبين لنا توزيع نسبة الوفيات وعدد الإصابات بمرض ما خلال ستة سنوات

السنوات	نسبة الوفاة		عدد المصابين
2000	16	ك	350
2001	20	ب	600
2002	13	ك	260
2003	35	أ	500
2004	13	ك	420
2005	40	أ	520
المجموع			**2650**

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{137}{} = 22,83$$

$$\bar{ع} = \frac{\sum ع}{ن} = \frac{2650}{} = 441,66$$

أ = 2 ، ب = 1 ، ج = 0، ك = 3

وبتطبيق القيم التالية في القانون نجد :

$$ل = \frac{\sqrt{أ\ د} - \sqrt{ب\ ج}}{\sqrt{أ\ د} + \sqrt{ب\ ج}} = \frac{\sqrt{2 \times 3} - \sqrt{1 \times 0}}{\sqrt{2 \times 3} + \sqrt{1 \times 0}} = \frac{2,45}{3,45} = 0,71$$

وبهذا نلاحظ أن درجة الائتلاف بين نسبة المرض والوفاة قوية معنى هذا أن هذا المرض خطير ومميت.

قياس الارتباط بين متغيرين مستقل وتابع ترتيبيين معا:

1-معامل ارتباط سيبرمان :

في كثير من الأحيان لا يستطيع الباحث تحديد قيم المتغير أثناء تغيره، ويصبح من السهل بالنسبة إليه ترتيب مراحل تغيره كأن يحدد أيهما الأول وأيهما الثاني وأيهما الأخير وفي هذه الحالة يستطيع الباحث ترتيب القيم المتعلقة بكل متغير أو ظاهرة وإيجاد العلاقة بين رتب المتغير الأول ورتب المتغير الثاني فإذا كانت هذه الرتب متفقة تماما كان الارتباط موجبا بصفة كاملة (+1) وإذا كان أحد المتغيرين أخذ ترتيبا تنازليا والثاني تصاعديا كان الارتباط بين المتغيرين سالبا (-1) بصفة كاملة وطريقة إيجاد معامل سيبرمان تقوم على أساس أنه كلما كان الفرق بين رتب القيم المتقابلة، في المتغيرين كبيرا كلما قلت قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين والعكس صحيح، لهذا كانت الخطوة الأولى في هذه الطريقة تشمل على إيجاد الفرق بين رتب القيم المتقابلة سوءا كانت مرتبة تصاعديا أم تنازليا معا، لكل من المتغير المستقل والتابع، وينتج عن هذه الفروق، قيم موجبة وأخرى سالبة الإشارة بحيث أن مجموع الفروق الموجبة يساوي مجموع الفروق السالبة، لهذا لإيجاد معامل ارتباط سيبرمان بين المتغيرين س، ع علينا من تربيع الفروق حتى تتحصل على الإشارات الموجبة فقط ويحسب معامل الارتباط لسبيرمان وفق العلاقة التاليـة :

$$ر = 1 - \frac{6 \sum ف^2}{ن(ن^2 -1)}$$

مثال : الجدول التالي يبين تقدير 10 طلاب في مادتي الإحصاء والاقتصاد السكاني والمطلوب إيجاد درجة الارتباط بين النتائج المتحصل عليها في كلا المادتين.

رقم الطالب	تقدير الإحصاء سَ	تقدير الاقتصاد السكاني ع	رتب س	رتب ع	ف	$ف^2$
1	ضعيف جدا	جيد	1	6	– 5	
2	مقبول	جيد	5,5	6	– 0,5	25
3	ممتاز	جيد جدا	10	8,5	1,5	0,25
4	مقبول	مقبول	5,5	3,5	2	2,25
5	ضعيف	جيد	2,5	6	– 3,5	4
6	جيد جدا	مقبول	9	3,5	5,5	12,25
7	جيد	ممتاز	8	10	– 2	30,25
8	ضعيف	ضعيف جدا	2,5	1	1,5	4
9	مقبول	ضعيف	5,5	2	3,5	2,25
10	مقبول	جيد جدا	5,5	8,5	– 3	9
المجموع			55	55	0	10,15

$$ر = 1 - \frac{6\ \Sigma\ ف^2}{ن(ن^2 - 1)} = 1 - \frac{6\ (101,5)}{10\ (10^2 - 1)} = 1 - \frac{609}{990} = \mathbf{0,39}$$

أي أن هناك ارتباط طردي ضعيف نوعا مابين درجات الطلاب العشر في مادتين الإحصاء والاقتصاد السكاني بمعنى آخر بإمكان الطالب أن يكون قد رسب في مادة لكن نجح في المادة الأخرى.

ملاحظة : لاحظنا في هذا المثال أن كثير من الطلاب تحصلوا على نفس التقدير في هذه الحالة أخذنا متوسط رتبة التقديرين فمثلا فيما يخص ترتيب قيم المتغير المستقل آلا وهو تقدير الإحصاء نلاحظ أن تقدير ضعيف جدا أخذ المرتبة الأولى ثم بعد ذلك وجدنا تقدير ضعيف لكل من الطالبين رقم 5 و8، ففي هذه الحالة افترضنا أن الطالب 5 أخذ الرتبة 2 والطالب 8 أخذ الرتبة 3 ثم أعطتنا متوسط الرتبتين كرتبة لتقدير ضعيف أي $\frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$

ونفس الشيء فيما يخص التقدير الموالي له بما أننا قمنا بالترتيب التصاعدي للقيم وكانت بذلك تقدير مقبول هذا التقدير الذي اشترك فيه الطالب2 ،4، 9 والعاشر وبنفس الطريقة نقوم بإعطاء رتب لهؤلاء الطلبة المشتركين في هذا التقدير ونحسب متوسطهم مثلا. نلاحظ أن الرتبة الأخيرة لتقدير ضعيف كانت 3 إذا نواصل الترتيب فالطالب رقم 2 يأخذ الرتبة 4، الطالب 3 يأخذ رتبة 5، الطالب 9 يأخذ رتبة 6، الطالب 10 يأخذ رتبة 7 ثم نحسب متوسط هذه الرتب أي :

$$\frac{7+6+5+4}{4} = \frac{22}{4} = 5,5$$

وللتأكد من صحة وضع الترتيب المقابل لكل قيمة في رتب المتغيرين هناك وسيلة للتأكد من ذلك وهي أن يكون مجموع رتب المتغير المستقل تساوي مجموع رتب المتغير التابع ويساوي النتيجة المتحصل عليها من القانون التالي : $\frac{ن\,(ن+1)}{2}$

وبتطبيق القانون على المثال السابق نجد عدد القيم ن = 10

$$\frac{ن\,(ن+1)}{2} = \frac{10\,(10+1)}{2} = 55$$

كذلك نجد مجموع رتب س = مجموع، رتب ع = 55

المعاملات المستعملة في حالة متغيرات كيفية أو كيفية مع كمية:

1-معامل ارتباط الاقتران :

واضع هذا القانون يونع ونستعمله في حالة وجود توزيع تكراري مزدوج بسيط التقاطع أي أن كل من المتغير المستقل والتابع يحتويان على قيمتين فقط أي يكون الجدول متمثلا على 4 خانات للتقاطع فقط وهو يستعمل عادة في حساب درجة العلاقة بين المتغيرات الكيفية.
ويحسب وفق القانون التالي :

$$ن = \frac{أد - ب ج}{أد + ب ج}$$

مثال : أوجد درجة الاقتران بين المتغيرين المستقل متمثل في عمل المرأة والتابع في مدى استعمالها لوسائل منع الحمل.

الإستعمال لوسائل منع الحمل العمل	**تستعمل**		**لا تستعمل**		**المجموع**
تعمل	20	أ	5	ب	25
لا تعمل	10	ج	15	د	25
المجموع	**30**		**20**		**50**

$$ن = \frac{أد - ب ج}{أد + ب ج} = \frac{(10)(5) - (15)(20)}{(10)(5) + (15)(20)} \frac{50 - 300}{50 + 300} = 0{,}71$$

إذن فهناك اقتران قوي موجب بين عمل المرأة ومدى استعمالها لوسائل منع الحمل أي كلما كانت المرأة عاملة كلما زاد إقبالها على استعمال وسائل منع الحمل.

3- معامل التوافـق :

إذا كانت البيانات المطلوب دراسة العلاقة بينهما عبارة عن بيانات وصفية لكلا المتغيرين أو وصفية لأحدهما وكمية للمتغير الآخر -أي المستقل والتابع- وكانت مقدمة لنا على شكل أكثر من قيمتين لأحد المتغيرين أي لدينا على الأقل ستة خانات للتقاطع فإننا نستعمل معامل التوافق.

ولحساب معامل التوافق نتبع الخطوات التالية :

1. نربع تكرار كل فئة.
2. نقسم مربع تكرار كل فئة على حاصل ضرب مجموع التكرارات الأفقية والرأسية للصف والعمود ثم نجمع خوارج القسمة ولنفرض أن المجموع = ج

وبحسب معامل التوافق وفق القانون التالي :

$$\sqrt{\frac{ج-1}{ج}}$$

ق =

مثال : في دراسة حول انتشار الأمية في منطقة ما وقفنا عند هذا الجدول الذي يبين توزيع مجموعة من الأفراد حسب سنهم ومستواهم التعليمي

المطلوب : حساب درجة التوافق بين المتغيرين

المستوى ال سن	**أمي**	**ابتدائي**	**متوسط**	**ثانوي**	**جامعي**	المجموع
15 – 10	–	4	2	–	–	6
20 – 15	6	1	10	1	–	18
25 – 20	1	6	4	3	1	15
30 – 25	–	1	1	2	3	7
35 – 30	–	–	1	2	1	4
المجموع	7	12	18	8	5	50

وبهذا تنحصر عملية الحصول على معامل التوافق في إيجاد مربع تكرار كل خلية تقاطع مقسوما على حاصل ضرب تكرار العمود × تكرار الصف كما يلي :

$$0,25 = \left[\frac{(0)^2}{5} + \frac{(0)^2}{8} + \frac{(2)^2}{18} + \frac{(4)^2}{12} + \frac{(0)^2}{7}\right]\frac{1}{6} = ج_1$$

$$0,60 = \left[(1)^2 + (10)^2 \quad (1)^2 \quad + (6)^2 \quad (0)^2\right]\frac{1}{18} = ج_2$$

$$(3)^2 \quad (4)^2 \quad (6)^2 \quad (1)^2 \quad (1)^2 \quad \frac{1}{15}$$

$$(2)^2 \quad (1)^2 \quad (1)^2 \quad (0)^2 \quad (3)^2 \quad \frac{1}{7}$$

$$(2)^2 \quad (1)^2 \quad (0)^2 \quad (0)^2 \quad 1$$

$ج_3 = [\quad + \quad + \quad + \quad + \quad] = 0,35$

$ج_4 = [\quad + \quad + \quad + \quad + \quad] = 0,34$

$ج_5 = [\quad + \quad + \quad + \quad + \quad] = 0,18$

مجموع : $ج = ج_1 + ج_2 + ج_3 + ج_4 + ج_5 = 0,25 + 0,60 + 0,35 + 0,34 + 0,18 = 1,72$

وبالتعويض بقيمة ج في القانون نجد أن معامل التوافق يقدر في هذا التوزيع بـ :

$$ق = \sqrt{\frac{ج-1}{ج}} = \sqrt{\frac{1 - 1,72}{1,72}} = 0,64$$

وبهذا نلاحظ أن درجة التوافق بين السن والمستوى التعليمي للمبحوث متوسطة.

4- معامل ارتباط لامـد :

ويستخدم هذا المعامل في حالة وجود متغيرين إما كيفيين معا أو أحدهما كيفي والثاني كمي وواضع هذا القانون العالم جوتمان عام 1941.

ويحسب وفق الصيغة التالية :

$$ل_{س\ ع} = \frac{\Sigma\ ك - ك_{ع}}{ن - ك_{ع}}$$

حيث أن ك هو تكرار الفئة المنوالية لكل فئة من فئات المتغير المستقل $ك_{ع}$ هو عبارة عن الفئة المنوالية للتوزيع الهامشي لمتغير التابع ع.

ملاحظة : إن كل من معامل التوافق ولامدا تنحصر قيمتهما بين 0، +1.

مثال : الجدول التالي يربط علاقة بين الطبقة الاجتماعية التي تنتمي إليها المبحوثة بسنها عند أول زواج والمطلوب إيجاد درجة العلاقة الإرتباطية بين المتغير ين حسب معامل لامدا.

الطبقة / السن	طبقة فقيرة	طبقة متوسطة	طبقة غنية	المجموع
20 – 25	50	30	10	90
25 – 30	15	40	20	75
30 – 35	13	18	35	66
المجموع	**78**	**88**	**65**	**231**

الحل : نضع المتغير التابع ع والمتغير المستقل الطبقة الاجتماعية (س)

إذن : $ل_{عس} = \frac{مج\ ك - ك_{ع}}{ن - ك_{ع}} = \frac{125 - 90}{231} = \frac{35}{} = 0,25$

اختبار كا^2 :

إن الباحث الاجتماعي عند معرفته بتوزيع كا^2، ويضعه تحت تصرفه فله جانب كبير من الأهمية وتستعمل هذه الأداة بصورة رئيسية لاختبار الفرضيات التي تقوم على أساس مقارنة مجموعة من التكرارات النظرية مع مجموعة من التكرارات الفعلية لتقيم الفرق بينهما لمعرفة ما إذا كان هذا

الفرق فرقا ظاهريا نتيجة قوى الحظ والصـــدفة أم أنه فرق حقيقي نتيجة قوى أخرى غير قوى الحظ والصدفة فإذا وجد أن هذا الفرق كان فرقا ظاهريا بمستوى دلالة معين نقبل فرضية العدم أما إذا وجد أن هناك فرقا حقيقيا بمســتوى دلالة معين يرفض فرضــية العدم، وهذا وأن إحدى مزايا هذا الاختبار الرئيســية أنه لا يتضــمن أية افتراضــات حول شــكل توزيع المجتمع الإحصــائي، وعليه فيمكن اختبار العلاقة بين المستوى التعليمي للمرأة وعدد أبنائها، أو العلاقة بين العقم والطلاق ... إلخ.

ومن أجل اختبار استقلالية الظواهر نقوم بتصنيف البيانات في جدول خاص كما سوف نرى في المثال التالي.

مثــــال : الجدول التالي يربط علاقة بين الحالة المدنية للشخص ومدى ادخاره ونريد معرفة هل ادخار المبحوث مستقل عن كونه متزوج أم لا.

الادخار **الحالة المدنية**	**مدخر**	**غير مدخر**	المجموع
متزوج	950	625	1575
أعزب	250	125	375
المجموع	**1200**	**750**	**1950**

1- نقوم بتحديد فرضــــية العدم : وفي هذا المثال ليس هناك علاقة بين الحالة المدنية والإيجار للشخص المبحوث.

2- تحديد مستوى الدلالة : ونسبته في الغالب 1% أو 5% في العلوم الاجتماعية.

3- تحديد التكرارات النظرية : وذلك بأن نعد جدول توافق نظري حيث نفترض أن المجاميع فيه متساوية ويحسب وفق القانون التالي.

$$\frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{المجموع الكلي/ العينة}}$$

كَ =

وبتطبيق هذا القانون على الجدول أعلاه نجد :

كَ المدخرون المتزوجون = $\frac{1200 \times 1975}{1950}$ = 969,23

كَ المدخرون العزاب = $\frac{1200 \times 375}{1950}$ = 230,77

كَ الغير مدخرون المتزوجون = $\frac{750 \times 1575}{1950}$ = 607,77

كَ الغير مدخرون العزاب = $\frac{375 \times 750}{1950}$ = 144,23

4– **حساب كا^2 المحسوبة** : وتحسب وفق القانون التالي :

كا^2 = مج $\frac{(\text{ك - كَ})^2}{\text{ك}}$

ك	**كَ**	**ك – كَ**	**(ك – كَ)^2**	**(ك – كَ)^2 / كَ**
950	969,23	- 19,23	369,79	0,38
250	230,77	19,23	369,79	1,60
625	605,77	19,23	369,79	0,61
125	144,23	19,23	369,79	2,56
المجموع				**5,15**

5– الخطوة المتبقية هي معرفة درجة الحرية ثم الكشف في جدول كا^2 علما إذا كانت قيمة كا2 لهذه القيمة لدرجة الحرية ذات دلالة إحصائية عند نسبة 5% أو 1% مثلا.

ودرجة الحرية تحسب وفق القانون التالي : (عدد الصفوف – 1) (عدد الأعمدة – 1) أي (ن$_1$–1) (ن$_2$ – 1) = (2–1) (2–1) = 1

6– عند درجة حرية كا^2 1 الجدولة نجدها من الجدول الموضـــوع في نهاية الكتاب = 3,841 عند نسبة 5%.

7– القرار والمقارنـــة : إذا قارنا بين قيمة كا^2 المحسوبة = 5,15 مع كا^2 الجد ولية من أجل مستوى دلالة 5% والتي قدرت بـــ 3,841 لوجدنا أن كا^2 الجد ولية < من كا^2 المحسوبة، ومنه نستنتج أن الفروق بين التكرارات النظرية والتكرارات الفعلية هي فروق جوهرية وبالتالي نرفض فرضية العدم ونقول أن هناك العلاقة بين الحالة المدنية للمبحوث وادخاره الشهري.

ملاحظة :

- إذا كانت كا^2 الجد ولية > من كا^2 المحســـوبة نســـتنتج أن هناك فروق بين التكرارات النظرية والتكرارات الفعلية وهي فروق ظاهرية راجعة للصـدفة وبالتالي نقبل فرضـية العدم والاسـتقلال أي لا توجد علاقة بين المتغيرين.

- أما إذا كانت كا^2 الجد ولية < من كا^2 المحســوبة نســتنتج أن هناك فروق جوهرية ونرفض فرضــية العدم أو الاستقلال ونقول أن هناك علاقة بين المتغيرين.

تصحيح يانس **Yets** :

يقوم هذا التصــحيح على أســاس إنقاص (0,5) من الفرق بين التكرارات النظرية والتكرارات الفعلية الشيء الذي يؤدي إلى زيادة احتمال أن يكون كا^2 المحسوبة ناتجة لقوى الحظ والصدفة. لكن هذا الإنقاص شــرط أن يكون بالقيمة المطلقة ويســتخدم كا^2 المصــحح إذا كان الفرق بين التكرارات النظرية والفعلية ك – كَ < 5 ويصبح بذلك قانون اختبار كا^2 المصحح كالتالي :

$$\text{كا}^2 = \frac{[\,|\text{ك} - \text{كَ}| - 0,5]^2}{\text{كَ}}$$

وبتطبيق هذا القانون على المثال السابق نجد كا^2 المصحح يقدر بـ :

ك	كَ	ك – كَ	ا ك – كَ ا – 0,5	(ا ك – كَ ا – 0,5)	(ا ك – كَ ا – 0,5)^2 / ك
950	969,23	– 19,23	18,73	350,81	0,36
250	230,77	19,23	18,73	350,81	1,52
625	605,77	19,23	18,73	350,81	0,58
125	144,23	19,23	18,73	350,81	2,48
المجموع					**4,89**

نفس الملاحظة تذكر بعد تصحيح كا^2 أين وجدنا كا^2 المحسوبة> كا^2 الجد ولية أي أن الفروق بين التكرارات النظرية والفعلية هي فروق جوهرية وبالتالي نرفض فرضـــية العدم، أي توجد علاقة بين الحالة المدنية للشخص ومدى ادخاره.

حالة خاصـة:

وهو نموذج خاص من اختبار كا^2 ونطلق عليه فحص انحراف نتائج الملاحظة التجريبية عن المتوقعة أي في حالة وجود صف واحد.

مثـــــال : هذا الجدول أخد من دراسة ميدانية لباحث يبحث عن العلاقة بين تغيب العمال حسب مكان عملهم أثناء الورديات.

مكان العمل	**عامل بالبلدية**	**في قطاع البناء**	**في القطاع الصناعي**	**في قطاع الخدمات**	**في القطاع التقليدي**	**تاجر**	**فلاح**	**المجموع**
عدد الأيام	69	38	33	90	115	138	145	628

هنا نفترض أن النتائج تتوزع باحتمالات متســـاوية وهذه الحالة موجودة في اختبار كا^2 أي تكون عدد الأيام المغيبة متســـاوية لحالات مكان العمل أي $\frac{628}{7} = 89,71$ وهذا ما نســـميه بالتكرارات النظرية كَ.

ك	ك	(ك – ك)	^{2}(ك – ك)	^{2}(ا ك – ك) / ك
69	89,71	20,71 -	428,90	4,78
38	89,71	51,71 -	2673,92	29,80
33	89,71	56,71 -	3216,02	35,85
90	89,71	0,29	0,084	0,0009
115	89,71	25,29	639,58	7,13
138	89,71	48,29	2231,92	25,99
145	89,71	55,29	3056,98	89,71
				193,26

درجة الحرية = (عدد الأعمدة – 1) = (7 – 1) = 6.

كا^2 الجدولة عند درجة حرية 6 نسبة دلالة 5 % مثلا تقدربـ 12,592

كا^2 المحسوبة > كا^2 الجدولة فهناك فروق جوهرية ونرفض فرضية العدم أي أن هناك علاقة بين نوعية العمل وعدد الأيام التي تم الغياب فيها.

كما يمكننا استعمال تصبح ينس في هذا المثال لزيادة احتمال أن تكون كا^2 المحسوبة ناتجة عن قوى الحظ والصدفة.